Universidade de Brasília
Instituto de Física

Felipe França Faria

O FLUXO DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL

Brasília-DF
2005

Felipe França Faria

O FLUXO DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Wadih Maluf

Brasília-DF
Abril de 2005

Felipe França Faria

O FLUXO DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. José Wadih Maluf
(Orientador) Instituto de Física/UnB

Prof. Dr. Vanessa Carvalho de Andrade
Instituto de Física/UnB

Prof. Dr. José Francisco da Rocha Neto
Departamento de Matemática/UFT

Brasília, 29 de abril de 2005.

Prof. Dr. Sebastião William da Silva
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física
Universidade de Brasília

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Amanda, por ter me presenteado com sua presença em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e orientador José Wadih Maluf por sua disponibilidade em compartilhar conhecimentos e pelo imenso apoio que tornaram possível o desenvolvimento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) por financiar e facilitar o desenvolvimento da pesquisa que originou este e outros trabalhos durante o mestrado.

À minha mãe Nilde, pelo apoio incondicional, pela revisão ortográfica e gramatical deste trabalho e, principalmente, pela dedicação e amor.

À meu pai Tino e toda minha família pelo apoio e amor.

RESUMO

O formalismo Hamiltoniano do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) permite uma definição de densidade de energia gravitacional a partir da qual podemos obter uma energia gravitacional local bem definida. Derivando as equações do campo gravitacional, procedentes do formalismo Lagrangeano do TEGR, e utilizando a definição da densidade de energia-momento gravitacional, obtemos uma equação de continuidade para a energia e o momento gravitacional. Desta equação segue uma expressão para o fluxo de energia-momento gravitacional. Analisamos esta definição no contexto de ondas gravitacionais planas e da métrica de Bondi, que descreve assintoticamente a radiação gravitacional de um sistema isolado, axialmente simétrico e não-girante. A análise do primeiro caso resulta no valor conhecido do fluxo de ondas gravitacionais planas. No caso da métrica de Bondi, obtemos a energia de Bondi, a perda de massa total e o fluxo de energia total no infinito espacial.

ABSTRACT

The Hamiltonian formalism of the Teleparallel Equivalent of general relativity (TEGR) allows a definition of gravitational energy density from which we can obtain a well-defined local gravitational energy. Taking the divergence of the gravitational field equations, coming from the Lagrangean formalism of the TEGR, and using the definition of the gravitational energy-momentum density, we obtain a continuity equation for the gravitational energy-momentum. From this equation it follows a general definition for the gravitational energy-momentum flux. We analyse this definition in the context of plane gravitational waves and of the Bondi metric, which describes asymptotically the gravitational radiation of an axially symmetric, non-rotating isolated system. The analysis of the first case results in the known value of the energy flux of plane gravitational waves. In the case of the Bondi metric, we obtain the Bondi energy, the loss of total mass and the total flux of gravitational energy at spacelike infinity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tendo como base o Princípio da Equivalência, que estabelece a equivalência entre um sistema de referência com aceleração uniforme e um sistema de referência inercial na presença de um campo gravitacional homogêneo, Einstein desenvolveu a sua teoria da gravitação, chamada de teoria da Relatividade Geral. Nesta teoria Einstein descreve o campo gravitacional através de um tensor métrico g_{mn} que é função das coordenadas e obtém, a partir deste tensor, que também determina as propriedades geométricas do espaço-tempo, as equações que descrevem a dinâmica do campo gravitacional e do espaço-tempo, chamadas de equações de Einstein.

Uma vez que o estudo do campo gravitacional confunde-se com o estudo da dinâmica do próprio espaço-tempo, os conceitos de energia, momento e momento angular do campo gravitacional adquirem um caráter não trivial. A formulação métrica da teoria da Relatividade Geral permite apenas a definição de pseudo-tensores de energia-momento, que dependem do sistema de coordenadas, para a descrição da energia e do momento gravitacional. A dependência do sistema de coordenadas torna impossível a obtenção de uma energia gravitacional bem definida a partir dos pseudo-tensores, já que para cada mudança de coordenadas se obtém um resultado diferente. Para podermos chegar a uma energia gravitacional localizada precisamos de uma densidade de energia-momento que seja covariante.

Uma expressão para a densidade de energia gravitacional independente do sistema de coordenadas surge naturalmente no formalismo Hamiltoniano [1,2,3] de uma formulação geométrica alternativa à Relatividade Geral, chamada de Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (Teleparallel Equivalent of General

Relativity – TEGR). Nesta formulação o campo gravitacional é descrito por tétradas autoparalelas ao invés do tensor métrico.

Uma vez identificada a definição de energia e momento gravitacional [4], o formalismo Lagrangeano do TEGR permite a dedução de uma equação de continuidade para a energia e o momento gravitacional, que por sua vez permite a obtenção de uma definição para o fluxo de energia-momento gravitacional [5].

No capítulo 1 apresentamos a base teórica e a descrição matemática da teoria da Relatividade Geral de Einstein e, a partir destas, utilizando o princípio da ação mínima, desenvolvemos as equações do campo gravitacional, chamadas de equações de Einstein. Na última seção do capítulo apresentamos alguns pseudo-tensores de energia-momento e através de um deles, o pseudo-tensor Landau-Lifshitz, obtemos a energia total de um espaço assintoticamente plano (energia de ADM).

No capítulo 2 discutimos a questão da localizabilidade do campo gravitacional e apresentamos a descrição matemática do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR). Em seguida, desenvolvemos a formulação Lagrangeana do TEGR e, por meio desta, chegamos às equações do campo gravitacional equivalentes às equações de Einstein. Finalmente, desenvolvemos a formulação Hamiltoniana do TEGR e, a partir dos vínculos desta, definimos uma densidade de energia gravitacional covariante.

No capítulo 3 partimos das equações do campo gravitacional obtidas no formalismo Lagrangeano do TEGR e desenvolvemos a equação de continuidade para a energia e o momento gravitacional. A partir desta equação chegamos à expressão do fluxo de energia-momento gravitacional. Neste capítulo também discutimos a escolha das tétradas e fazemos uma descrição das ondas gravitacionais planas. Aplicando a expressão do fluxo de energia-momento nesta descrição obtemos os fluxos de energia e de momento gravitacionais de ondas gravitacionais planas.

No capítulo 4 fazemos uma breve discussão sobre o espaço-tempo de Bondi, que descreve a radiação gravitacional de um sistema isolado, axialmente simétrico e não-girante em um espaço-tempo assintoticamente plano, e apresentamos a construção da métrica e das tétradas que descrevem este espaço-tempo. Posteriormente, obtemos a energia de Bondi, a perda de massa total e o fluxo total de energia gravitacional no infinito espacial.

Notação: Os índices latinos do meio do alfabeto i, j, k,... referem-se a hipersuperfícies do tipo espaço e assumem os valores 1, 2 e 3. Os índices gregos e latinos do início do alfabeto são índices do espaço-tempo e do grupo $SO(3,1)$, respectivamente. Ambos variam de 0 a 3 de acordo com $m = \{0, i\}$, $a = \{(0),(i)\}$. Será adotada a convenção de Einstein e unidades onde $c = 1$ e $G = 1$, a menos que se diga o contrário.

1. TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

1.1 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Especial de Einstein, publicada em 1905, foi desenvolvida a partir de dois postulados básicos. O primeiro, chamado de Princípio da Relatividade, afirma que as leis da física devem manter as suas formas em todos os sistemas de referência inerciais. O segundo diz que a velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência e independe do movimento do corpo emissor.

A combinação desses dois postulados levou a uma nova concepção de espaço e de tempo, que devem ser considerados como conectados formando uma estrutura quadri-dimensional chamada de espaço-tempo. O espaço-tempo onde os eventos físicos da relatividade especial ocorrem, denominado de espaço-tempo de Minkowski, é um espaço-tempo plano quadri-dimensional contínuo com uma métrica pseudo-Euclideana. O intervalo entre dois eventos em um sistema de referência inercial, neste espaço-tempo, é dado por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ , \tag{1.1.1}$$

onde, em coordenadas cartesianas, a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ possui componentes

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Impondo que o intervalo (1.1.1) mantenha sua forma sob transformações entre as coordenadas de dois sistemas de referência inerciais, chamadas de transformações de Lorentz, chegamos à forma que estas transformações devem ter,

$$x'^{m} = \Lambda^{m}{}_{n} x^{n} \ ,$$

onde $\Lambda^{m}{}_{n}$ deve satisfazer $\Lambda^{m}{}_{l}\Lambda^{n}{}_{s} h_{mn} = h_{ls}$. No caso particular de um "boost" na direção x, a matriz $\Lambda^{m}{}_{n}$ adquire a forma,

$$\Lambda^{m}{}_{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na tentativa de estender o princípio da relatividade para sistemas de referência não-inerciais, Einstein postulou o Princípio da Equivalência. Este princípio, que é baseado na igualdade das massas inercial e gravitacional, diz que um sistema de referência com aceleração uniforme é equivalente a um sistema de referência inercial na presença de um campo gravitacional homogêneo.

Para que a Teoria da Relatividade Geral também se aplicasse para campos gravitacionais não-homogêneos, Einstein deixou o Princípio da Equivalência em sua forma original, e utilizou a geometria Riemanniana para a realização matemática da teoria.

A descrição do espaço-tempo através de um referencial não-inercial (acelerado) requer a utilização de uma geometria não-Euclideana. Neste caso, o espaço-tempo será um espaço-tempo quadri-dimensional contínuo não-Euclideano, chamado de espaço-tempo de Riemann. Os pontos deste espaço-tempo são descritos por quatro coordenadas arbitrárias x^0, x^1, x^2, x^3 de uma forma única e continua. Tal sistema é denominado sistema de coordenadas Gaussianas.

O intervalo entre dois eventos em um sistema de referência não-inercial irá se transformar em uma forma quadrática [1],

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n \,, \tag{1.1.2}$$

onde g_{mn}, chamado de tensor métrico, é função das coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3. O tensor métrico irá variar sob transformações de coordenadas generalizadas fazendo com que o intervalo (1.1.2) permaneça invariante sob estas transformações. Pelo fato de $dx^m dx^n$ ser simétrico em m e n, qualquer parte anti-simétrica de g_{mn} não contribuirá para ds^2. Sendo assim, devemos assumir que g_{mn} é simétrico ($g_{mn} = g_{nm}$).

A arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas, no espaço-tempo de Riemann, nos leva à definição do Princípio da Covariância Generalizada. Este princípio afirma que as leis da física devem manter suas formas em todos os sistemas de coordenadas Gaussianas, ou seja, elas devem ser covariantes por transformações de coordenadas generalizadas. Isso irá ocorrer ao incorporarmos g_{mn} nas leis da física.

O tensor métrico g_{mn} é a única quantidade matemática que descreve os efeitos não-inerciais de um sistema de coordenadas adaptado a um sistema de referência. Pelo princípio da equivalência o efeito inercial é interpretado como uma atração gravitacional. Portanto, g_{mn} além de determinar a métrica do espaço-tempo e o comportamento inercial dos corpos, deve também descrever o campo gravitacional.

---
[1] referência [6] § 82.

A presença de um campo gravitacional irá distorcer a geometria do espaço-tempo, dando a ele uma curvatura. Esta distorção irá causar um desvio no movimento retilíneo e uniforme de uma partícula livre, fazendo com que a partícula se movimente ao longo da geodésica, que é a menor distância possível a ser percorrida na geometria curva.

1.2 Elementos da geometria Riemanniana

No espaço-tempo de Minkowski um vetor é definido pelo seu comportamento sob transformações de Lorentz, já no espaço-tempo de Riemann um vetor será definido pelo seu comportamento sob transformações de coordenadas generalizadas. Um objeto A_m será um vetor covariante sob transformações de coordenadas generalizadas se ele se transformar de acordo com

$$A'_m = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} A_n \,.$$

No espaço-tempo de Riemann a diferenciação ordinária de um tensor não manterá o caráter tensorial que se tinha no espaço-tempo de Minkowski. Para construirmos um tensor por diferenciação, primeiro devemos definir o transporte paralelo de um vetor. A mudança dA_m nos componentes de um vetor sob transporte paralelo em um deslocamento infinitesimal dx^n é dada por:

$$dA_m = \Gamma^l{}_{mn} A_l dx^n \,,$$

onde $\Gamma^l{}_{mn}$, chamada de conexão afim, é certa função das coordenadas.

Fazendo o transporte paralelo do vetor A_m de x para $x+dx$, antes da subtração, na derivada ordinária,

$$\partial_n A_m = \frac{\partial A_m}{\partial x^n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A_m(x+\Delta x) - A_m(x)}{\Delta x^n} \,,$$

obtemos

$$\lim_{dx \to 0} \frac{A_m(x+\Delta x) - A_m(x) - dA_m}{\Delta x^n} \,.$$

Substituindo a expressão do transporte paralelo nesta expressão chegamos à definição da derivada covariante de um vetor,

$$\nabla_n A_m = \lim_{dx\to 0}\left[\frac{A_m(x+\Delta x)-A_m(x)}{\Delta x^n} - \Gamma^l{}_{mb} A_l \frac{dx^b}{dx^n}\right] \\ = \partial_n A_m - \Gamma^l{}_{mn} A_l \,, \tag{1.2.1}$$

que mantêm o caráter tensorial da diferenciação.

Tomando a derivada covariante do tensor métrico e realizando alguns cálculos obtemos,

$$\nabla_b g_{mn} = \partial_b g_{mn} - g_{ln}\Gamma^l{}_{mb} - g_{ml}\Gamma^l{}_{nb} \;.$$

Da equação $\nabla_b g_{mn} = 0$ podemos escrever as derivadas do tensor métrico em termos da conexão afim,

$$\partial_b g_{mn} = g_{ln}\Gamma^l{}_{mb} + g_{ml}\Gamma^l{}_{nb} \;. \tag{1.2.2}$$

Permutando ciclicamente os índices b , m e n de (1.2.2) encontramos,

$$\partial_n g_{bm} = g_{lm}\Gamma^l{}_{bn} + g_{nl}\Gamma^l{}_{bm} \,, \tag{1.2.3}$$

e

$$\partial_m g_{nb} = g_{lb}\Gamma^l{}_{nm} + g_{bl}\Gamma^l{}_{mn} \;. \tag{1.2.4}$$

Somando (1.2.3) e (1.2.4), subtraindo (1.2.2) e fazendo $\Gamma^l{}_{mn} = \Gamma^l{}_{nm}$ chegamos à relação que expressa a conexão afim em termos do tensor métrico,

$$\Gamma^l{}_{mn} = \frac{1}{2} g^{lb}\left(\partial_n g_{bm} + \partial_m g_{nb} - \partial_b g_{mn}\right). \tag{1.2.5}$$

Em geral, as derivadas covariantes não comutam, ou seja, $\nabla_m\nabla_n A_b \neq \nabla_n\nabla_m A_b$. Tomando a diferença entre $\nabla_n\nabla_m A_b$ e $\nabla_m\nabla_n A_b$, e realizando alguns cálculos encontramos,

$$\nabla_n\nabla_m A_b - \nabla_m\nabla_n A_b = \left(-\partial_n\Gamma^a{}_{bm} + \partial_m\Gamma^a{}_{bn}\right)A_a + \left(\Gamma^s{}_{bn}\Gamma^a{}_{sm} - \Gamma^s{}_{bn}\Gamma^a{}_{sn}\right)A_a \;.$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$\nabla_n\nabla_m A_b - \nabla_m\nabla_n A_b = R^a{}_{bmn} A_a \,,$$

onde

$$R^{a}{}_{bmn} = -\partial_n \Gamma^{a}{}_{bm} + \partial_m \Gamma^{a}{}_{bn} + \Gamma^{s}{}_{bn}\Gamma^{a}{}_{sm} - \Gamma^{s}{}_{bm}\Gamma^{a}{}_{sn} \,, \qquad (1.2.6)$$

chamado de tensor de Riemann, determina a curvatura do espaço-tempo.

Contraindo o primeiro e o terceiro índice do tensor de Riemann, chegamos a um tensor de segunda ordem R_{bm} chamado de tensor de Ricci,

$$R_{bm} = \partial_a \Gamma^{a}{}_{bm} - \partial_m \Gamma^{a}{}_{ba} - \Gamma^{s}{}_{ba}\Gamma^{a}{}_{sm} + \Gamma^{s}{}_{bm}\Gamma^{a}{}_{sa} \,,$$

e contraindo os índices do tensor de Ricci obtemos o escalar de curvatura R,

$$R = \partial_a \Gamma^{am}{}_{m} - \partial_m \Gamma^{am}{}_{a} - \Gamma^{sm}{}_{a}\Gamma^{a}{}_{sm} + \Gamma^{sm}{}_{m}\Gamma^{a}{}_{sa} \,. \qquad (1.2.7)$$

O comprimento de arco s_{12} entre dois pontos *P1* e *P2*, pertencentes a uma curva a, no espaço-tempo Riemanniano é dado por,

$$s_{12} = \int_{P_2}^{P_1} ds = \int_{P_2}^{P_1} \sqrt{g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}}\, dt \,,$$

onde t é o tempo próprio. Da curva que extremiza a integral s_{12}, ou seja, tal que $ds_{12} = 0$, chamada de curva geodésica, encontramos a equação de movimento de uma partícula na presença de um campo gravitacional [2],

$$\frac{d^2x^m}{ds^2} + \Gamma^{m}{}_{bn}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^n}{ds} = 0 \,,$$

chamada de equação geodésica.

[2] referência [7] seção 6.4.

1.3 Equações do campo gravitacional

Em 1915, após várias tentativas, Einstein desenvolveu as equações do campo gravitacional, que descrevem a interação entre a matéria e a geometria do espaço-tempo. Einstein verificou que aquelas equações deveriam ser covariantes sob transformações de coordenadas generalizadas. Além disso, elas deveriam ser escritas de uma forma em que o tensor de energia-momento total T^{mn}, que descreve os campos de matéria, fosse proporcional a uma expressão diferencial de segunda ordem formada pelo tensor métrico g_{mn} e por suas derivadas primeiras e segundas, e que possuísse divergência nula.

As mesmas equações do campo gravitacional desenvolvidas por Einstein foram obtidas simultaneamente por Hilbert através do princípio da ação mínima. Este princípio, através do qual as equações de um sistema físico são obtidas, afirma que um funcional das variáveis dinâmicas do sistema físico, a ação I, é estacionária em respeito a pequenas variações das variáveis ($dI = 0$).

No caso das equações do campo gravitacional a ação será composta pela soma da ação do campo gravitacional I_g com a ação dos campos de matéria I_m (composta por todos os campos que interagem com o campo gravitacional), e a variável dinâmica que deverá ser variada é o tensor métrico g_{mn}.

A ação do campo gravitacional é dada por

$$I_g = \int d^4x \sqrt{-g} L_g \,. \qquad (1.3.1)$$

Nesta ação a densidade Lagrangeana do campo gravitacional L_g deve ser expressa em termos de um tensor que contenha g_{mn} e suas derivadas, que seja invariante sob a variação da ação e que conduza a equações diferenciais de segunda ordem. A quantidade mais simples que satisfaz estas condições é o escalar de curvatura R . Sendo assim, a densidade Lagrangeana do campo gravitacional pode ser escrita como,

$$L_g = kR \ ,$$

onde $k = 1/16p$ ($k = c^3/16pG$, com $dx^0 = cdt$).

Substituindo esta densidade Lagrangeana na ação (1.3.1) chegamos a

$$I_g = k\int d^4x\sqrt{-g}R \ . \tag{1.3.2}$$

Variando esta ação em relação à g_{mn} encontramos

$$\begin{aligned} dI_g = {} & k\int d^4x\left(d\sqrt{-g}\right)g^{mn}R_{mn} + k\int d^4x\sqrt{-g}\left(d\,g^{mn}\right)R_{mn} \\ & + k\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{mn}\left(dR_{mn}\right), \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

onde as variações de $\sqrt{-g}$ e do tensor R_{mn} são dadas por [3],

$$d\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{mn}\left(dg^{mn}\right), \tag{1.3.4}$$

e

$$\begin{aligned} g^{mn}dR_{mn} &= g^{mn}d\left(\partial_a\Gamma^a{}_{ml} - \partial_m\Gamma^a{}_{al} + \Gamma^b{}_{ml}\Gamma^a{}_{ab} - \Gamma^b{}_{al}\Gamma^a{}_{mb}\right) \\ &= g^{mn}\,\nabla_a\left(d\,\Gamma^a{}_{ml}\right) - g^{mn}\,\nabla_m\left(d\,\Gamma^a{}_{al}\right) = \nabla_a\left(g^{mn}d\,\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}d\,\Gamma^m{}_{mn}\right). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Introduzindo a notação

$$V^a = g^{mn}d\,\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}d\,\Gamma^m{}_{mn} \ ,$$

podemos reescrever a equação (1.3.5) como

$$g^{mn}dR_{mn} = \nabla_a V^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}V^a\right). \tag{1.3.6}$$

Substituindo as equações (1.3.4) e (1.3.6) na expressão (1.3.3) chegamos a

[3] referência [6] §86 e §95

$$dI_g = k\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R\right)dg^{mn} + k\int d^4x\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}V^a\right).$$

Considerando que estamos trabalhando em um espaço-tempo assintoticamente plano, o segundo termo desta expressão não irá se anular no limite $r \to \infty$. Neste limite temos,

$$g_{mn} \simeq h_{mn} + h_{mn}(1/r),$$

$$\Gamma^l{}_{mn} \simeq \partial_l g_{mn} \simeq O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$d\,\Gamma^l{}_{mn} \simeq O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Destes comportamentos assintóticos, deduzimos que,

$$V^a \simeq g^{mn} d\,\Gamma^l{}_{mn} \simeq O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

no limite $r \to \infty$. Assim, utilizando o comportamento assintótico de V^a, vemos que,

$$\int_{V\to\infty} d^4x\,\partial_a\left(\sqrt{-g}V^a\right) = \int_{S\to\infty} dS_a\left(\sqrt{-g}V^a\right) = \int_{S\to\infty}(r\,dq)(r\,senq\,df)(dt).O\left(\frac{1}{r^2}\right) \neq 0,$$

ao integrarmos sobre uma superfície S de raio constante.

Para que $\int d^4x\partial_a\left(\sqrt{-gV^a}\right)$ se anule no limite $r \to \infty$, devemos acrescentar à ação do campo gravitacional (1.3.2) o termo de superfície,

$$-\partial_a\left[\sqrt{-g}\left(g^{mn}\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}\Gamma^m{}_{mn}\right)\right],$$

obtendo assim

$$I_g = k\int d^4x\sqrt{-g}R - k\int d^4x\,\partial_a\left[\sqrt{-g}\left(g^{mn}\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}\Gamma^m{}_{mn}\right)\right]. \qquad (1.3.7)$$

Pode-se mostrar que esta ação é invariante por uma transformação infinitesimal de coordenadas $x'^{m} = x^{m} + e^{m}(x)$ no limite $r \to \infty$. A ação (1.3.2) não terá esta mesma propriedade [8], visto que ela não possui um comportamento assintótico bem definido. Sendo assim, a ação (1.3.7) será utilizada como a ação do campo gravitacional ao invés da ação (1.3.2).

Variando a ação (1.3.7), encontramos,

$$
\begin{aligned}
dI_g = {} & k\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R\right)dg^{mn} + k\int d^4x\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}V^a\right) \\
& - k\int d^4x\, d\,\partial_a\left[\sqrt{-g}\left(g^{mn}\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}\Gamma^m{}_{mn}\right)\right].
\end{aligned}
$$

As duas últimas integrais desta expressão podem ser reescritas como,

$$
\begin{aligned}
& k\int d^4x\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}V^a\right) - k\int d^4x\, d\,\partial_a\left[\sqrt{-g}\left(g^{mn}\Gamma^a{}_{mn} - g^{an}\Gamma^m{}_{mn}\right)\right] \\
& = -k\int d^4x\partial_a\left[d\left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^a{}_{mn} - d\left(\sqrt{-g}g^{an}\right)\Gamma^m{}_{mn}\right].
\end{aligned}
\qquad (1.3.8)
$$

Como $d\left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^a{}_{mn}$ e $d\left(\sqrt{-g}g^{an}\right)\Gamma^m{}_{mn}$ são da ordem de $1/r^3$, a expressão (1.3.8) irá se anular no limite $r \to \infty$. Portanto, a variação da ação do campo gravitacional resultará em,

$$
dI_g = k\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R\right)dg^{mn}. \qquad (1.3.9)
$$

Para chegarmos às equações do campo gravitacional, nos resta determinar a variação da ação do campo de matéria, que é dada por:

$$
I_m = \int d^4x\sqrt{-g}L_m.
$$

Utilizando o teorema de Gauss e fazendo $dg^{mn} = 0$ nos limites de integração, a variação da ação dos campos de matéria resultará em,

$$dI_m = \int d^4x d\left(\sqrt{-g}L_m\right) = \int d^4x \left\{ \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_m\right)}{\partial g^{mn}} - \partial_l \left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_m\right)}{\partial g^{mn}{}_{,l}} \right) \right\} dg^{mn} \ , \qquad (1.3.10)$$

onde $g^{mn}{}_{,l} = \partial_l g^{mn}$.

Definindo o tensor de energia-momento dos campos de matéria como sendo,

$$T_{mn} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_l \left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_m\right)}{\partial g^{mn}{}_{,l}} \right) - \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_m\right)}{\partial g^{mn}} \right\}, \qquad (1.3.11)$$

a expressão (1.3.10) será escrita como,

$$dI_m = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g} T_{mn} dg^{mn} \ . \qquad (1.3.12)$$

Utilizando o princípio da ação mínima $dI_g + dI_m = 0$ e as relações (1.3.9) e (1.3.12) chegamos a

$$k\int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \right) dg^{mn} - \frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g} T_{mn} dg^{mn} = 0 \ ,$$

de onde obtemos as equações do campo gravitacional, chamadas de Equações de Einstein:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = \frac{1}{2k} T_{mn} \ . \qquad (1.3.13)$$

1.4 Pseudo-tensores de energia-momento

Na Teoria da Relatividade Restrita a energia e o momento de um sistema são expressos em termos do tensor de energia-momento T^{mn}. Para que a energia e o momento total de um sistema fechado se conservem este tensor deverá obedecer à lei de conservação,

$$\partial_m T^{mn} = 0 . \tag{1.4.1}$$

Na Teoria da Relatividade Geral de Einstein as expressões que descrevem a energia e o momento gravitacionais dependem no máximo das derivadas primeiras de g_{mn}, fazendo com que estas expressões sejam dependentes do sistema de coordenadas e, portanto, não sejam covariantes. O fato destas expressões não serem covariantes faz com que elas na verdade sejam pseudo-tensores de energia-momento.

Através dos pseudo-tensores não é possível determinar de maneira única a energia gravitacional numa região finita do espaço, já que, iremos obter resultados diferentes para sistemas de coordenadas diferentes. O uso de pseudo-tensores possibilita apenas a obtenção da energia total de um espaço assintoticamente plano, pois para sistemas assintoticamente planos (integrando sobre todo o espaço), os pseudo-tensores de energia-momento se tornam independentes do sistema de coordenadas.

Uma das primeiras tentativas de se obter um pseudo-tensor de energia-momento total foi feita por Einstein [9]. A idéia de Einstein foi expressar a lei de conservação do tensor de energia-momento dos campos de matéria na presença de um campo gravitacional [4],

[4] referência [6] § 94.

$$\nabla_m T^m{}_n = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_m\left(\sqrt{-g}T^m{}_n\right)+\frac{1}{2}T_{ms}\partial_n g^{ms} = 0\,, \tag{1.4.2}$$

na forma da lei de conservação (1.4.1) de um tensor de energia-momento total t^{mn},

$$\nabla_m T^m{}_n = \partial_m t^m{}_n = 0\,. \tag{1.4.3}$$

Para que t^{mn} seja um tensor de energia-momento total ele deve representar tanto os campos de matéria quanto os campos gravitacionais. Desta forma, podemos interpretar (1.4.2) como sendo a expressão para a troca de energia entre o campo gravitacional e os campos de matéria [10].

Para reescrevermos a equação (1.4.2) na forma (1.4.3), partirmos da definição da variação da ação do campo gravitacional,

$$dI_g = k\int d^4x dL_g = k\int d^4x\left\{\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}}dg^{mn} + \frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}{}_{,l}}dg^{mn}{}_{,l}\right\}, \tag{1.4.4}$$

onde,

$$L_g = \sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{mn}\left(\partial_l\Gamma^l{}_{mn} - \partial_n\Gamma^l{}_{ml} + \Gamma^l{}_{ls}\Gamma^s{}_{mn} - \Gamma^l{}_{ms}\Gamma^s{}_{ln}\right). \tag{1.4.5}$$

Integrando por partes o lado direito da equação (1.4.4), e impondo o anulamento dos termos de superfície, obtemos,

$$dI_g = k\int d^4x\left\{\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}} - \partial_l\left(\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}{}_{,l}}\right)\right\}dg^{mn}\,. \tag{1.4.6}$$

Os dois primeiros termos do lado direito da densidade Lagrangeana (1.4.5) podem ser reescritos como,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{mn}\left(\partial_l\Gamma^l{}_{mn} - \partial_n\Gamma^l{}_{ml}\right) &= \partial_a\left(\sqrt{-g}g^{mn}\Gamma^l{}_{mn}\right) - \partial_m\left(\sqrt{-g}g^{mn}\Gamma^l{}_{ml}\right)\\ &\quad - \partial_l\left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^l{}_{mn} + \partial_n\left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^l{}_{ml}.\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Como estamos considerando sistemas assintoticamente planos, os termos de divergência total,

$$\partial_a \left(\sqrt{-g}g^{mn}\Gamma^l{}_{mn}\right) - \partial_m \left(\sqrt{-g}g^{mn}\Gamma^l{}_{ml}\right),$$

serão simplesmente desprezados.

Com o auxílio das identidades

$$\partial_l \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^g{}_{lg} ,$$

$$\nabla_l g^{mn} = 0 ,$$

podemos reescrever os dois termos restantes de (1.4.7) como,

$$-\partial_l \left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^l{}_{mn} + \partial_n \left(\sqrt{-g}g^{mn}\right)\Gamma^l{}_{ml} = 2\sqrt{-g}g^{mn}\left(\Gamma^g{}_{ml}\Gamma^l{}_{gn} - \Gamma^g{}_{mn}\Gamma^l{}_{gl}\right).$$

Portanto, a densidade Lagrangeana (1.4.5) irá se reduzir a,

$$L_g = \sqrt{-g}g^{mn}\left(\Gamma^s{}_{ml}\Gamma^l{}_{sn} - \Gamma^s{}_{mn}\Gamma^l{}_{sl}\right). \qquad (1.4.8)$$

Comparando a expressão (1.4.6) com a expressão (1.3.9), vemos que,

$$\sqrt{-g}\left(R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R\right) = \left\{\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}} - \partial_l\left(\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}{}_{,l}}\right)\right\}.$$

Usando a expressão acima e as Equações de Einstein (1.3.13) encontramos

$$T_{mn} = \frac{k}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}} - \partial_l\left(\frac{\partial L_g}{\partial g^{mn}{}_{,l}}\right)\right\}. \qquad (1.4.9)$$

Multiplicando os dois lados desta equação por $\frac{1}{2}\partial_n g^{ms}$ ficamos com

$$\frac{1}{2}T_{ms}\partial_n g^{ms} = \frac{k}{2\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}} - \partial_l\left(\frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}{}_{,l}}\right)\right\}\partial_n g^{ms} .$$

Com o auxílio da identidade,

$$\frac{\partial L_g}{\partial x^n} = \frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^n} + \frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}{}_{,l}}\frac{\partial g^{ms}{}_{,l}}{\partial x^n} ,$$

podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}T_{ms}\partial_n g^{ms} = \frac{k}{2\sqrt{-g}}\partial_l\left\{d_n^{\,l}L_g - \frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}{}_{,l}}\partial_n g^{ms}\right\}. \qquad (1.4.10)$$

Fazendo a substituição

$$t^l{}_n = \frac{k}{2\sqrt{-g}}\left\{d_n^{\,l}L_g - \frac{\partial L_g}{\partial g^{ms}{}_{,l}}\partial_n g^{ms}\right\}, \qquad (1.4.11)$$

em (1.4.10), encontramos

$$\frac{1}{2}T_{ms}\partial_n g^{ms} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l\left(\sqrt{-g}\,t^l{}_n\right).$$

Utilizando esta expressão em (1.4.2) chegamos à equação,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_m\left(\sqrt{-g}\,T^m{}_n\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l\left(\sqrt{-g}\,t^l{}_n\right) = 0,$$

que pode ser reescrita como,

$$\partial_m\left(\sqrt{-g}\,T^m{}_n + \sqrt{-g}\,t^m{}_n\right) = 0.$$

Nesta equação podemos identificar t^{mn} como sendo o pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional e,

$$t^m{}_n = \sqrt{-g}\left(T^m{}_n + t^m{}_n\right), \qquad (1.4.12)$$

como sendo o pseudo-tensor de energia-momento total de Einstein.

Ao substituirmos (1.4.9) e (1.4.11) em (1.4.12) obtemos

$$\begin{aligned} t^m{}_n &= k\left[g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}} - g^{ms}\partial_l\left(\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}{}_{,l}}\right) + \frac{d_n^m L_g}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial L_g}{\partial g^{sl}{}_{,m}}\partial_n g^{sl}\right] \\ &= k\left(g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}} + \partial_l g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}{}_{,l}} + \frac{d_n^m L_g}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial L_g}{\partial g^{sl}{}_{,m}}\partial_n g^{sl}\right) - k\partial_l\left(g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}{}_{,l}}\right). \end{aligned}$$

Após a realização de alguns cálculos podemos demonstrar que [11],

$$g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}} + \partial_l g^{ms}\frac{\partial L_g}{\partial g^{ns}{}_{,l}} + \frac{d_n^m L_g}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial L_g}{\partial g^{sl}{}_{,m}}\partial_n g^{sl} = 0.$$

Sendo assim, o pseudo-tensor de energia-momento total será dado por,

$$t^{m}{}_{n} = \partial_{l}\left(-kg^{ms}\frac{\partial L_{g}}{\partial g^{ns}{}_{,l}}\right).$$

Substituindo a densidade Lagrangeana (1.4.8) nesta expressão e realizando alguns cálculos chegamos à forma final do pseudo-tensor de energia-momento total de Einstein:

$$t^{m}{}_{n} = k\partial_{l}\left\{\frac{g_{ng}}{\sqrt{-g}}\partial_{s}\left[-g\left(g^{ls}g^{mg} - g^{ms}g^{lg}\right)\right]\right\}.$$

Outros pseudo-tensores de energia-momento total foram obtidos de forma semelhante a este pseudo-tensor. Entre os quais estão o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz[5],

$$L^{mn} = k\partial_{l}\partial_{s}\left\{-g\left(g^{mn}g^{ls} - g^{ml}g^{ns}\right)\right\}, \qquad (1.4.13)$$

o pseudo-tensor de Papapetrou [12],

$$\Sigma^{mn} = k\partial_{l}\partial_{s}\left\{\sqrt{-g}\left(g^{mn}h^{ls} - g^{ml}h^{ns} + g^{ls}h^{mn} - g^{nl}h^{ms}\right)\right\},$$

o pseudo-tensor de Tolman [13],

$$\Pi^{m}{}_{n} = 2k\partial_{l}\left\{\sqrt{-g}\left[-g^{gm}\Lambda^{l}{}_{ng} + \frac{1}{2}g^{m}{}_{n}g^{gs}\Lambda^{l}{}_{gs}\right]\right\},$$

onde,

$$\Lambda^{l}{}_{ng} = -\Gamma^{l}{}_{ng} + \frac{1}{2}g^{l}{}_{n}\Gamma^{s}{}_{sg} + \frac{1}{2}g^{l}_{g}\Gamma^{s}{}_{sn},$$

e o pseudo-tensor de Weinberg[6],

$$W^{mn} = k\partial_{l}\left(h^{mn}\partial^{l}h - h^{ml}\partial^{n}h - h^{mn}\partial_{s}h^{ls} + \partial^{n}h^{lm} + \partial^{m}h^{ln} - \partial^{l}h^{mn}\right),$$

---

[5] referência [6] § 96

[6] referência [10] seção 7.6

onde $h_{mn} \approx g_{mn} - h_{mn}$ e os índices de h^{mn} e de ∂_m são abaixados e levantados pela métrica de Minkowski h^{mn} .

É possível chegarmos à expressão da energia total de um sistema assintoticamente plano através de qualquer pseudo-tensor de energia-momento descritos anteriormente. Como exemplo, vamos obter esta expressão utilizando o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz.

Substituindo o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz (1.4.13) na expressão para o vetor de energia-momento [7],

$$P^m = \int L^{mn} d\,^3S_v \ ,$$

encontramos,

$$P^m = k\int \partial_l \partial_s \left\{ -g\left(g^{mn} g^{ls} - g^{ml} g^{ns} \right)\right\} d^3S_n \ .$$

Considerando o componente $m = 0$ em P^m e integrando em uma determinada hipersuperfície $d\,^3S_0 = d^3x$, chegamos a,

$$\begin{aligned} P^0 = E &= k\int_V d\,^3x\, \partial_l \partial_s \left\{ -g\left(g^{00} g^{ls} - g^{0l} g^{0s} \right)\right\} \\ &= k\int_V d\,^3x\, \partial_i \partial_j \left\{ -g\left(g^{00} g^{ij} - g^{0i} g^{0j} \right)\right\}. \end{aligned}$$

No limite $V \to \infty$ fixamos o sistema de coordenadas tal que $g^{00} = -1$ e $g^{0i} = 0$. Sendo assim, neste limite podemos escrever,

$$\begin{aligned} E &= -k \int_{V\to\infty} d^3x \partial_i \partial_j \left(-gg^{ij} \right) = -k \int_{S\to\infty} dS_i \left[g^{ij} \partial_j \left(-g \right) - g \partial_j g^{ij} \right] \\ &= -k \int_{S\to\infty} dS_i \left[g^{ij} g^{kl} \partial_j g_{kl} - g \partial_j g^{ij} \right]. \end{aligned}$$

---

[7] referência [6] § 96

Fazendo a expansão $g_{ij} = h_{ij} + h_{ij}$ e $g^{ij} = h^{ij} - h^{ij}$, e considerando a aproximação em primeira ordem de h_{ij} obtemos a expressão para a energia total de um sistema assintoticamente plano:

$$E_{ADM} = -k \int_{S \to \infty} dS_i \left[h^{ij} h^{kl} \partial_j h_{kl} - \partial_j h^{ij} \right] = k \int_{S \to \infty} dS_i \left[\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj} \right], \qquad (1.4.14)$$

que é a mesma expressão para a energia total de um sistema assintoticamente plano obtida através da formulação canônica de Arnowitt, Deser e Misner [14] (energia de ADM).

2. TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL

2.1 Localizabilidade da energia gravitacional

Na seção anterior vimos que a não localizabilidade da energia gravitacional está relacionada com a descrição dos campos gravitacionais pelo tensor métrico g_{mn}. Isso não implica a inexistência de uma energia gravitacional local. A não localizabilidade da energia gravitacional irá depender apenas da formulação matemática utilizada na descrição da gravitação.

Os físicos relativistas que acreditam que a não localizabilidade da energia gravitacional seja uma propriedade intrínseca à Relatividade Geral se baseiam no chamado "princípio da equivalência infinitesimal", que surgiu da tentativa de se generalizar o Princípio da Equivalência para campos gravitacionais arbitrários. Uma formulação conhecida deste princípio é dada por Pauli [15]:

> "Para toda região infinitesimalmente pequena do universo (*i.e.*, uma região do universo tão pequena que as variações espaciais- e temporais - da gravitação possam ser negligenciadas nela) sempre existe um sistema de coordenadas $K_0(x^0,x^1,x^2,x^3)$ no qual a gravitação não possui influência nem no movimento das partículas ou em qualquer outro processo físico."

Segundo este princípio podemos sempre anular o campo gravitacional em uma região infinitesimal do espaço-tempo por uma transformação de coordenadas, fazendo com que não tenhamos uma definição de energia gravitacional local. Mas, segundo alguns relativistas tais como Eddington e Synge [16], isto nem sempre vai ser verdade. No caso de um campo gravitacional real o tensor de curvatura de Riemann não se anula mesmo em um ponto, pois sendo nulo em um ponto seria nulo nos outros. Esta curvatura não nula é responsável por forças de maré, cujos efeitos não se anulam numa região infinitesimal do espaço-tempo por transformações de coordenadas. Sendo assim, podemos medir o campo gravitacional em uma região arbitrariamente pequena a partir das forças de maré [17].

Einstein deixou bem claro, na maioria das suas publicações sobre o Princípio da Equivalência, sua validade apenas para campos gravitacionais homogêneos, que equivalem a referenciais uniformemente acelerados em regiões finitas do espaço-tempo. Sua tentativa, feita em 1912, quando tratava de campos gravitacionais estáticos, de limitar o princípio da equivalência a regiões infinitesimais do espaço-tempo foi abandonada em publicações futuras devido a várias dificuldades encontradas [18]. O que o Princípio da Equivalência diz é que podemos anular o campo gravitacional por uma mudança no sistema de referência. Dele não podemos concluir que o campo gravitacional irá se anular por uma transformação de coordenadas.

A aceitação do “Princípio da Equivalência Infinitesimal” vem do fato de podermos descrever o espaço-tempo de Riemann como uma colagem de regiões infinitesimais onde vale a Relatividade Especial. Mas, segundo Einstein, tanto para a Relatividade Geral quanto para a Relatividade Especial devemos considerar regiões finitas do espaço-tempo para a descrição do movimento de partículas livres. Em regiões infinitesimais do espaço-tempo fica impossível distinguir a geodésica de outras linhas mundo da partícula, sendo, portanto, impossível de se determinar a influência que a gravitação possui no movimento das partículas.

Uma versão do Princípio da Equivalência dada por Einstein em 1918 diz que [19]:

> "Princípio da Equivalência: inércia e gravidade são idênticas em essência. Disto e dos resultados da teoria especial da relatividade segue necessariamente que o tensor fundamental simétrico (g_{mn}) determina as propriedades métricas do espaço, o comportamento inercial dos corpos nele, bem como a ação gravitacional".

Desta versão do princípio da equivalência concluímos que a estrutura responsável pelos efeitos inerciais e pelos efeitos gravitacionais é o tensor métrico g_{mn}. Portanto, por possuir a métrica de Minkowski, a Relatividade Especial não pode ser considerada como um caso particular em que não há campo gravitacional.

A energia gravitacional será bem definida localmente se tivermos uma expressão para a densidade de energia independente do sistema de coordenadas. Tal expressão surge naturalmente no Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (Teleparallel Equivalent of General Relativity – TEGR), que é uma formulação geométrica alternativa à Relatividade Geral que substitui o tensor métrico por tétradas autoparalelas na descrição do campo gravitacional.

A primeira proposta de utilizar tétradas para a descrição do campo gravitacional foi feita por Einstein [20] em 1928 na tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Sua tentativa falhou porque não havia solução de Schwarzschild na sua equação de campo simplificada. Mais tarde, em 1961, Møller [21,22] resgatou a idéia de Einstein mostrando que só em termos de tétradas podemos obter uma densidade Lagrangeana que nos leve a um tensor de energia-momento gravitacional. A partir dos trabalhos de Møller, em 1962, Pellegrini e Plebanski [23] chegaram a uma formulação Lagrangeana para a gravitação em termos das tétradas. Através do formalismo das tétradas, em 1963, Schwinger [24] obteve uma expressão para a energia total do campo gravitacional.

Em 1967, Hayashi e Nakano [25] começaram a formular a teoria de gauge do grupo de translações do espaço-tempo. Hayashi e Shirafuji uniram esta teoria com a estrutura do paralelismo absoluto e desenvolveram [26], em 1979, uma teoria denominada “nova relatividade geral”, que possui vários aspectos em comum com a relatividade geral. Em 1978, Hehl et. al. [27] utilizaram esta formulação para tentar unificar a gravitação com as interações fortes. Entre 1979 e 1980, Schweizer e Straumann [28], Nitsch e Hehl [29], e Schweizer et. al [30] demonstraram a equivalência, do ponto de vista observacional, entre a teoria da relatividade geral e o TEGR.

2.2 Campos de Tétradas

Os campos de tétradas, ou simplesmente tétradas, são um conjunto de quatro vetores linearmente independentes ortonormais [8],

$$e^{a}{}_{m}(x) = \left\{ e^{(0)}{}_{m}, e^{(1)}{}_{m}, e^{(2)}{}_{m}, e^{(3)}{}_{m} \right\},$$

que formam a base de um sistema de coordenadas local construído em um ponto arbitrário x do espaço-tempo, onde $m = \{0,1,2,3\}$ são índices do espaço-tempo e $a = \{(0),(1),(2),(3)\}$ são índices locais de Lorentz.

As respostas das tétradas às transformações locais de Lorentz e transformações de coordenadas generalizadas são dadas por

$$\tilde{e}_{a}{}^{m}(x) = \Lambda_{a}{}^{b}(x) e_{b}{}^{m}(x),$$

e

$$e'_{a}{}^{m}(x) = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{n}} e_{a}{}^{n},$$

respectivamente, onde em cada ponto do espaço-tempo as matrizes $\Lambda^{a}{}_{b}$ satisfazem,

$$\Lambda^{a}{}_{c}\Lambda^{b}{}_{d}h_{ab} = h_{cd}.$$

As tétradas satisfazem a relação de ortogonalidade

$$e^{a}{}_{m}e^{bm} = h^{ab},$$

onde $h^{ab} = diag(-1,+1,+1,+1) = h_{ab}$ é a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas. Assim, temos que $e^{(0)}{}_{m}$ é um vetor do tipo tempo e $e^{(i)}{}_{m}$, com $i = 1,2,3$, são vetores do tipo espaço.

---

[8] referência [6] § 98

Os índices locais de Lorentz das tétradas são levantados e abaixados pela métrica de Minkowski h^{ab},

$$e_{am} = h_{ab} e^{b}{}_{m} ,$$

$$e^{an} = h^{ab} e_{b}{}^{n} ,$$

onde h_{ab} é a métrica inversa,

$$h_{ab} h^{bc} = d_{a}{}^{c} ,$$

e $e_{a}{}^{m}$ é a tétrada inversa,

$$e_{a}{}^{m} e^{b}{}_{m} = d_{a}{}^{b} .$$

Multiplicando a relação acima por $e^{a}{}_{n}$ encontramos

$$\left(e^{a}{}_{n} e_{a}{}^{m} \right) e^{b}{}_{m} = e^{b}{}_{n} ,$$

de onde obtemos a relação,

$$e^{a}{}_{n} e_{a}{}^{m} = d_{n}{}^{m} . \qquad (2.2.1)$$

Os índices do espaço-tempo das tétradas são abaixados e levantados pelo tensor métrico g_{mn},

$$e^{a}{}_{m} = g_{ml} e^{al} .$$

Multiplicando esta relação por e_{an},

$$g_{ml} e^{al} e_{an} = e^{a}{}_{m} e_{an} ,$$

e utilizando a relação (2.2.1) obtemos a relação entre as tétradas e o tensor métrico,

$$g_{mn} = e^{a}{}_{m} e_{an} , \qquad (2.2.2)$$

ou

$$g_{mn} = e^{a}{}_{m} e^{b}{}_{n} h_{ab} ,$$

sendo que as tétradas convertem índices do espaço-tempo em índices locais de Lorentz e vice-versa.

O paralelismo absoluto (teleparalelismo) das tétradas, isto é, o paralelismo das tétradas em pontos distantes do espaço-tempo, ocorre se sua derivada covariante for nula,

$$\nabla_n e_a{}^m = \partial_n e_a{}^m + \Gamma^m_{ln} e_a{}^l = 0 .$$

Resolvendo esta equação obtemos a conexão afim,

$$\Gamma^l{}_{mn} = e^{al}\partial_m e_{an} , \tag{2.2.3}$$

que é assimétrica nos índices m e n .

Dois vetores em pontos distantes são considerados paralelos se eles tiverem componentes idênticas com relação às tétradas locais nos pontos considerados. Por exemplo, no ponto x^l os componentes de um vetor $V^m(x)$ em relação à tétrada são $V^a(x) = e^a{}_m(x)V^m(x)$. Já num ponto distante dx^l de x^l temos que os componentes de $V^m(x)$ em relação à tétrada são $V^a(x+dx) = V^a(x) + DV^a$, onde $DV^a = e^a{}_l\left(\nabla_m V^l\right)dx^m$, sendo a derivada covariante ∇_m construída com a conexão afim (2.2.3). Portanto, o anulamento da derivada covariante construída a partir desta conexão afim define o paralelismo absoluto de vetores e tensores.

Substituindo a conexão afim (2.2.3) no tensor de torção, que é definido por,

$$T^l{}_{mn} = \Gamma^l{}_{mn} - \Gamma^l{}_{nm} ,$$

e no tensor de curvatura (1.2.6), obtemos, respectivamente, uma torção não nula,

$$T^l{}_{mn} = e^{al}\left(\partial_m e_{an} - \partial_n e_{am}\right) , \tag{2.2.4}$$

e um tensor de curvatura nulo,

$$R^{a}{}_{bmn} = 0\,.$$

Sendo assim, vemos que o espaço-tempo do TEGR, cuja base é formada por tétradas autoparalelas, chamado de espaço-tempo de Weitzenböck [31], é caracterizado por uma torção não nula e uma curvatura nula, ao contrário do espaço-tempo de Riemann, que é caracterizado por uma torção nula e uma curvatura não nula. Neste espaço-tempo a curvatura nula define o paralelismo absoluto das tétradas e o tensor de torção não nulo, que é função das tétradas autoparalelas, é o responsável pelos efeitos gravitacionais.

2.3 Formalismo Lagrangeano do TEGR

No TEGR a descrição do campo gravitacional não é única. Podemos estabelecer tanto uma densidade Lagrangeana, que é invariante sob transformações de Lorentz locais (sob o grupo $SO(3,1)$ local) [32,33,34], quanto uma densidade Lagrangeana, que é invariante sob transformações de Lorentz globais (sob o grupo $SO(3,1)$ global) [3,4,22,26,35,36].

A simetria $SO(3,1)$ local surge ao utilizarmos para a descrição da densidade Lagrangeana, além das tétradas $e^{a}{}_{m}$, a conexão afim de *spin* w_{mab}. Esta conexão afim, também chamada de conexão afim *local*, é a conexão que devemos introduzir para construirmos, no espaço-tempo curvo, a derivada covariante local dos campos espinoriais e tensoriais. Ela surge pela imposição da covariância da equação de Dirac sob o grupo $SO(3,1)$ local no espaço-tempo curvo. Esta imposição leva à definição da derivada covariante local de um campo espinorial $y(x)$ [37 - 38],

$$D_m y = \partial_m y - \frac{1}{4} i w_{mab} S^{ab} y \ ,$$

onde $S^{ab} = \frac{i}{2}\left[g^{a}, g^{b}\right]$ é uma representação de spin ½ do grupo $SO(3,1)$ e $w_{mab} = -w_{mba}$ é a conexão afim local.

Esta derivada covariante fixa a lei de transformação sob o grupo $SO(3,1)$ local para a conexão afim local [37 - 39],

$$w'_{mab} = \Lambda_a{}^{c} w_{mcd} \Lambda_b{}^{d} + \Lambda_{ac}\, \partial_m \Lambda_b{}^{c} \, .$$

Impondo que a derivada covariante da tétrada $e^{a}{}_{n}$, construída a partir da conexão afim $\Gamma^{l}{}_{mn}$ e da conexão afim local w_{mab}, se anule,

$$\nabla_{m} e^{a}{}_{n} = \partial_{m} e^{a}{}_{n} - \Gamma^{l}{}_{mn} e^{a}{}_{l} + w_{m}{}^{a}{}_{b} e^{b}{}_{n} = 0 ,$$

o que define o paralelismo absoluto das tétradas na teoria com simetria $SO(3,1)$ local, obtemos

$$\Gamma^{l}{}_{mn} = e^{a}{}_{n} e^{bl} w_{mab} + e^{al} \partial_{m} e_{an} .$$

Substituindo esta conexão afim no tensor de curvatura

$$R^{a}{}_{bmn}(w) = e^{a}{}_{a} e_{b}{}^{b} R^{a}{}_{bmn}(\Gamma) ,$$

e no tensor de torção,

$$T^{a}{}_{mn}(w) = e^{a}{}_{l} T^{l}{}_{mn}(\Gamma) ,$$

iremos obter, respectivamente,

$$R^{a}{}_{bmn}(w) = \partial_{m} w_{n}{}^{a}{}_{b} - \partial_{n} w_{m}{}^{a}{}_{b} + w_{m}{}^{a}{}_{c} w_{n}{}^{c}{}_{b} - w_{n}{}^{a}{}_{c} w_{m}{}^{c}{}_{b} , \qquad (2.3.1)$$

e

$$T^{a}{}_{mn}(w) = \partial_{m} e^{a}{}_{n} - \partial_{n} e^{a}{}_{m} + w_{m}{}^{a}{}_{b} e^{b}{}_{n} - w_{n}{}^{a}{}_{b} e^{b}{}_{m} . \qquad (2.3.2)$$

Multiplicando (2.3.2) por e_{al} obtemos,

$$T_{lmn} = e_{al} T^{a}{}_{mn} = e_{al} \partial_{m} e^{a}{}_{n} - e_{al} \partial_{n} e^{a}{}_{m} + w_{mln} - w_{nlm} .$$

Permutando os índices deste tensor de torção encontramos,

$$T_{mln} = e_{am} \partial_{l} e^{a}{}_{n} - e_{am} \partial_{n} e^{a}{}_{l} + w_{lmn} - w_{nml} .$$

e

$$T_{nml} = e_{an} \partial_{m} e^{a}{}_{l} - e_{an} \partial_{l} e^{a}{}_{m} + w_{mnl} - w_{lnm} .$$

Somando T_{lmn} , T_{mln} e T_{nml} e isolando $w_{mab} = e_{a}{}^{l} e_{b}{}^{n} w_{mln}$ chegamos a,

$$w_{mab} = {}^{\circ}w_{mab} + K_{mab} , \qquad (2.3.3)$$

onde ${}^{\circ}w_{mab}$ é a conexão de Levi-Civita (cuja torção associada é nula),

$${}^{\circ}w_{mab} = -\frac{1}{2} e^{c}{}_{m} \left(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab} \right) ,$$

$$\Omega_{abc} = e_{an}\left(e_b{}^m \partial_m e_c{}^n - e_c{}^m \partial_m e_b{}^n\right),$$

e K_{mab} é o tensor de contorção,

$$K_{mab} = \frac{1}{2} e_a{}^l e_b{}^n \left(T_{lmn} + T_{nlm} - T_{mnl}\right),$$

definido em termos do tensor de torção (2.3.2).

Considerando os mesmos argumentos utilizados na seção 1.2, devemos adicionar um termo de superfície à densidade Lagrangeana no vácuo. Levando isso em consideração, em termos das tétradas e da conexão afim local, podemos tomar como a densidade Lagrangeana no vácuo a expressão,

$$eR(e, w) - 2\partial_m\left(e e^{am} e^{bn} w_{nab}\right), \tag{2.3.4}$$

onde $e = \det(e^a{}_m) = \sqrt{-g}$.

Utilizando a relação

$$R(e, w) = e^{am} e^{bn} R_{abmn}(w),$$

e a expressão (2.3.3), na equação (2.3.4), encontramos [1]

$$\begin{aligned} eR(e, w) - 2\partial_m\left(e e^{am} e^{bn} w_{nab}\right) &= eR(e) - 2\partial_m\left(e e^{am} e^{bn}\, {}^{\circ}w_{nab}\right) \\ &+ e\left(\frac{1}{4} T^{amn} T_{amn} + \frac{1}{2} T^{amn} T_{man} - T^m T_m\right), \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

onde $T^a{}_{mn}$ é dado por (2.3.2) e $T^a{}_{am} = T_m$.

Substituindo

$$\Sigma^{abc} T_{abc} = \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a, \tag{2.3.6}$$

onde

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(h^{ac} T^b - h^{ab} T^c\right), \tag{2.3.7}$$

na expressão (2.3.5) chegamos a

$$eR(e,w) - 2\partial_m\left(ee^{am}e^{bn}w_{nab}\right) = eR(e) - 2\partial_m\left(ee^{am}e^{bn}\,{}^{\circ}w_{nab}\right) + e\left(\Sigma^{amn}T_{amn}\right). \tag{2.3.8}$$

Por meio da identidade

$$\partial_m\left(ee^{am}e^{bn}w_{nab}\right) = \partial_m\left(ee^{am}e^{bn}\,{}^{\circ}w_{nab}\right) - \partial_m\left(eT^m\right),$$

podemos reescrever a equação (2.3.8) sem os dois termos de divergência,

$$eR(e,w) = eR(e) + e\Sigma^{amn}T_{amn} - 2\partial_m\left(eT^m\right).$$

Desta expressão vemos que, se impusermos o anulamento de $R(e,w)$, o escalar de curvatura $eR(e)$ se torna equivalente à combinação quadrática do tensor de torção. O termo de superfície $\partial_m\left(eT^m\right)$ é descartado por não contribuir para a ação no caso de espaços assintoticamente planos. Portanto, a densidade lagrangeana total é dada por,

$$L'(e,w,l) = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} + e\,l^{abmn}R_{abmn}(w) - L_m, \tag{2.3.9}$$

onde e^{am} e w_{mab} são variáveis independentes, l^{abmn} são multiplicadores de Lagrange que garante a condição de curvatura nula e L_m é a densidade Lagrangeana dos campos de matéria.

Variando L' em relação a $e^a{}_m$, w_{mab} e l^{abmn}, e fazendo uso das identidades,

$$\frac{d\left(\Sigma^{abc}T_{abc}\right)}{de^{am}} = 2\Sigma^{abc}\frac{dT_{abc}}{de^{am}},$$

$$\frac{d\left(\Sigma^{abc}T_{abc}\right)}{dw_{mab}} = 2\Sigma^{abc}\frac{dT_{abc}}{dw_{mab}},$$

obtemos as equações de campo,

$$\frac{dL'}{de^{am}} = e_{al}e_{bm}D_n\left(e\Sigma^{bln}\right) - e\left(\Sigma^{bn}{}_aT_{bnm} - \frac{1}{4}e_{am}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) - \frac{1}{4k}eT_{am} = 0, \tag{2.3.10}$$

$$\frac{dL'}{dw_{mab}} = \Sigma^{amb} - \Sigma^{bma} + \frac{1}{e} D_n \left(e\, l^{abmn} \right) + \frac{1}{2} S^{mab} = 0\,, \tag{2.3.11}$$

$$\frac{dL'}{d\,l^{abmn}} = R_{abmn}(w) = 0\,, \tag{2.3.12}$$

onde

$$eT_{am} = \frac{dL_m}{de^{am}}\,,$$

$$eS^{mab} = \frac{dL_m}{dw_{mab}}\,,$$

$$D_n \left(e\Sigma^{bln} \right) = \partial_n \left(e\Sigma^{bln} \right) + e w_n{}^b{}_c \Sigma^{cln}\,,$$

$$D_n \left(e\, l^{abmn} \right) = \partial_n \left(e\, l^{abmn} \right) + e \left(w_n{}^b{}_c\, l^{acmn} + w_n{}^a{}_c\, l^{cbmn} \right).$$

Com o auxilio da equação de vínculo (2.3.12) podemos reescrever a equação (2.3.10) como,

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{de^{am}} &= e_{al}\, e_{bm} D_n \left(e\Sigma^{bln} \right) - e \left(\Sigma^{bn}{}_a T_{bnm} - \frac{1}{4} e_{am} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) - \frac{1}{4k} eT_{am} \\ &\equiv \frac{1}{2} e \left\{ R_{am}(e) - \frac{1}{2} e_{am} R(e) \right\} - \frac{1}{4k} eT_{am} = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos as equações de campo,

$$R_{am}(e) - \frac{1}{2} e_{am} R(e) = \frac{1}{2k} T_{am}\,.$$

Através da relação $g_{mn} = e^a{}_m e_{an}$, vemos que estas equações de campo são equivalentes às equações de Einstein.

Existem vários fatores que nos levam a reduzir a simetria $SO(3,1)$ local da densidade Lagrangeana a uma simetria $SO(3,1)$ global. Na teoria com simetria $SO(3,1)$ local os multiplicadores de lagrange l^{abmn} não são determinados unicamente [33] e a conexão afim local não possui influência na dinâmica das tétradas. Além de possuir uma formulação mais simples e gerar os mesmos resultados obtidos através da densidade Lagrangeana com simetria $SO(3,1)$ local, a densidade Lagrangeana com simetria $SO(3,1)$ global permite o acoplamento do campo gravitacional com o campo espinorial de Dirac [40]. Além disso, uma formulação Hamiltoniana do TEGR com uma simetria $SO(3,1)$ global pode ser construída [1,3].

Fazendo $w_{mab} = 0$ na densidade Lagrangeana (2.3.9) obtemos a densidade Lagrangeana com simetria $SO(3,1)$ global,

$$L'(e) = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} - L_m . \qquad (2.3.13)$$

Variando L' em relação a $e^a{}_m$ encontramos

$$\frac{dL'}{de^{am}} = e_{al}e_{bm}\partial_n\left(e\Sigma^{bln}\right) - e\left(\Sigma^{bn}{}_aT_{bnm} - \frac{1}{4}e_{am}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) - \frac{1}{4k}eT_{am} = 0 , \qquad (2.3.14)$$

de onde obtemos,

$$\frac{dL'}{de^{am}} = e_{al}e_{bm}\partial_n\left(e\Sigma^{bln}\right) - e\left(\Sigma^{bn}{}_aT_{bnm} - \frac{1}{4}e_{am}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right) - \frac{1}{4k}eT_{am}$$
$$\equiv \frac{1}{2}e\left\{R_{am}(e) - \frac{1}{2}e_{am}R(e)\right\} - \frac{1}{4k}eT_{am} = 0.$$

Portanto, podemos observar que as densidades Lagrangeanas com simetria $SO(3,1)$ local e simetria $SO(3,1)$ global geram as mesmas equações para $e^a{}_m$.

2.4 Formalismo Hamiltoniano do TEGR

Por simplicidade iremos apresentar nesta seção um resumo do formalismo Hamiltoniano do TEGR. Para chegarmos à densidade Hamiltoniana no TEGR devemos reescrever a densidade Lagrangeana (2.3.13), com $L_m = 0$, na forma canônica,

$$L = \Pi^{ak}\dot{e}_{ak} - H\,,$$

onde Π^{ak} é o momento canonicamente conjugado a e_{ak}, obtido da variação da densidade Lagrangeana (2.3.13) em relação a $\dot{e}_{ak} = \partial_0 e_{ak}$,

$$\Pi^{ak} \equiv \frac{dL}{d\dot{e}_{ak}} = -4ke\Sigma^{a0k}\,. \qquad (2.4.1)$$

Com o auxílio da equação (2.3.7) podemos escrever o momento (2.4.1) na forma,

$$\begin{aligned}\Pi^{ak} = ke\Big\{&g^{00}\left(-g^{kj}T^{a}{}_{0j} - e^{aj}T^{k}{}_{0j} + 2e^{ak}T^{j}{}_{0j}\right)\\ &+ g^{0k}\left(g^{oj}T^{a}{}_{0j} + e^{aj}T^{0}{}_{0j}\right) + e^{a0}\left(g^{oj}T^{k}{}_{0j} + g^{kj}T^{0}{}_{0j}\right)\\ &- 2\left(e^{a0}g^{ok}T^{j}{}_{0j} + e^{aj}g^{0j}T^{0}{}_{0j}\right) - g^{0i}g^{kj}T^{a}{}_{ij}\\ &+ e^{ai}\left(g^{oj}T^{k}{}_{ij} - g^{kj}T^{0}{}_{ij}\right) - 2\left(g^{0i}e^{ak} - g^{ik}e^{a0}\right)T^{j}{}_{ij}\Big\}.\end{aligned}$$

Reescrevendo a densidade Lagrangeana (2.3.13) em termos de e_{ak}, Π^{ak}, e dos multiplicadores de Lagrange, chegamos à densidade Hamiltoniana [3],

$$H = e_{a0}C^{a} + a_{ik}\Gamma^{ik} + b_{k}\Gamma^{k} + \partial_{k}\left(e_{a0}\Pi^{ak}\right), \qquad (2.4.2)$$

onde a_{ik} e b_k são multiplicadores de Lagrange e Γ^{ik}, Γ^{k} e C^{a} são vínculos de primeira classe, dados por,

$$\Gamma^{ik} = -\Gamma^{ki} = \Pi^{[ik]} - ke\left\{-g^{im}g^{kj}T^{0}{}_{mj} + \left(g^{im}g^{0k} - g^{km}g^{0i}\right)T^{j}{}_{mj}\right\},$$

$$\Gamma^k = \Pi^{0k} + 2ke\left(g^{kj}g^{0i}T^0{}_{ij} - g^{0k}g^{0i}T^j{}_{ij} + g^{00}g^{ik}T^j{}_{ij}\right),$$

e

$$\begin{aligned} C^a = &-\partial_k \Pi^{ak} + e^{a0}\left[-\frac{1}{4g^{00}}ke\left(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2\right)\right. \\ &\left.+ke\left(\frac{1}{4}g^{im}g^{nj}T^b{}_{mn}T_{bij} + \frac{1}{2}g^{nj}T^i{}_{mn}T^m{}_{ij} - g^{ik}T^m{}_{mi}T^n{}_{nk}\right)\right] \\ &-\frac{1}{2g^{00}}ke\left(g_{ik}g_{jl}g^{aij}P^{kl} - \frac{1}{2}g_{ij}g^{aij}P\right) - kee^{ai}\left(g^{0m}g^{nj}T^b{}_{ij}T_{bmn}\right. \\ &\left.+g^{nj}T^0{}_{mn}T^m{}_{ij} + g^{0j}T^n{}_{mj}T^m{}_{ni} - 2g^{0k}T^m{}_{mk}T^n{}_{ni} - 2g^{jk}T^0{}_{ij}T^n{}_{nk}\right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} g^{aij} = &-\frac{1}{2ke}\left(e^{ai}\Gamma^j + e^{aj}\Gamma^i\right) - e^{ak}\left[g^{00}\left(g^{jm}T^i{}_{km} + g^{im}T^j{}_{km} + 2g^{ij}T^m{}_{mk}\right)\right. \\ &\left.+g^{0m}\left(g^{0j}T^i{}_{mk} + g^{0i}T^j{}_{mk}\right) - 2g^{0i}g^{0j}T^m{}_{mk} + \left(g^{jm}g^{0i} + g^{im}g^{0j} - 2g^{ij}g^{0m}\right)T^0{}_{mk}\right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P^{ik} = &-2g^{00}\left(g^{im}g^{kj}y_{mj} - g^{ik}y\right) + 2\left(g^{0i}g^{km}g^{0j} + g^{0k}g^{im}g^{0j}\right)y_{mj} \\ &-2\left(g^{ik}g^{0m}g^{0j}y_{mj} - g^{0i}g^{0k}y\right), \end{aligned}$$

$$y_{ij} = y_{ji} = \frac{1}{2}\left(T_{i0j} + T_{j0i}\right).$$

Uma das principais diferenças entre a formulação da densidade Hamiltoniana (2.4.2) e a formulação de ADM, é que na formulação de ADM os vínculos vetoriais H_i são lineares no momento, enquanto que na formulação da densidade Hamiltoniana (2.4.2) ambos os vínculos $C^{(i)}$ e $C^{(0)}$ são em geral lineares e quadráticos em $\Pi^{(ik)}$.

A forma integral do vínculo $C^{(0)} = 0$ pode ser interpretada como uma equação de energia do tipo $E - H^{(0)} = 0$,

$$\int d^3x\left(-\partial_k \Pi^{(0)k}\right) = \int d^3x\left\{e^{a0}\left[-\frac{1}{4g^{00}}ke\left(g_{ik}g_{jl}P^{ij}P^{kl} - \frac{1}{2}P^2\right) + \ldots\right\},\right.$$

já que o lado esquerdo dela conduz à energia de ADM para espaços assintoticamente planos,

$$\int_{V\to\infty} d^3x\left(-\partial_k\Pi^{(0)k}\right)=k\int_{S\to\infty} dS_i\left[\partial_j h_{ij}-\partial_i h_{jj}\right]\equiv E_{ADM}\ .$$

Assim, uma vez que a quantidade $-\partial_k\Pi^{(0)k}$ é uma densidade de energia, podemos definir a energia gravitacional em um volume finito V do espaço como,

$$E=-\int_V d^3x\partial_k\Pi^{(0)k}\ . \qquad (2.4.3)$$

A partir desta expressão podemos definir o vetor energia-momento gravitacional em um volume finito V de uma hipersuperfície espacial tridimensional,

$$P^a=-\int_V d^3x\partial_k\Pi^{ak}\ . \qquad (2.4.4)$$

Esta equação satisfaz todos os requerimentos que esperamos de qualquer definição de energia gravitacional: se anula no espaço-tempo de Minkowski; produz a energia de ADM e de Bondi nos limites apropriados [41]; produz o valor apropriado para campos gravitacionais fracos esfericamente simétricos; produz a massa irredutível do buraco negro de Kerr [4]; é invariante sob transformações de coordenadas, na hipersuperfície espacial tridimensional; Finalmente, se transforma como um vetor sob o grupo $SO(3,1)$ global.

3. O FLUXO DE ENERGIA-MOMENTO GRAVITACIONAL

3.1 Equação de continuidade e o fluxo de energia-momento gravitacional

A equação de continuidade para o vetor energia-momento gravitacional é obtida ao multiplicarmos a equação de campo (2.3.14) pelas tétradas inversas $e^{al}e^{am}$,

$$e^{al}e^{am}e_{al}e_{bm}\partial_n\left(e\Sigma^{bln}\right)-e^{al}e^{am}e\left(\Sigma^{bn}{}_{a}T_{bnm}-\frac{1}{4}e_{am}T_{bcd}\Sigma^{bcd}\right)-\frac{1}{4k}e^{al}e^{am}eT_{am}=0,$$

Simplificando esta equação e multiplicando por $-4k$, obtemos,

$$\partial_n\left(-4ke\Sigma^{aln}\right)+kee^{am}\left(4\Sigma^{bnl}T_{bnm}-d^{l}{}_{m}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)+ee^{a}{}_{m}T^{lm}=0.$$

Restringindo os índices de espaço-tempo l para assumir só valores espaciais, isto é, fazendo $l=j$, chegamos a,

$$\partial_0\left(-4ke\Sigma^{aj0}\right)+\partial_k\left(-4ke\Sigma^{ajk}\right)+kee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^{j}{}_{m}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)+ee^{a}{}_{m}T^{jm}=0.$$

Tomando a divergência da equação acima em relação a j, encontramos,

$$-\partial_0\partial_j\left(-4ke\Sigma^{a0j}\right)-\partial_j\partial_k\left(-4ke\Sigma^{akj}\right)+k\partial_j\left[ee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^{j}{}_{m}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]$$
$$+\partial_j\left(ee^{a}{}_{m}T^{jm}\right)=0.$$

O segundo termo desta equação irá se anular, por causa da propriedade de anti-simetria $\Sigma^{akj}=-\Sigma^{ajk}$. Sendo assim, podemos reescrever a equação anterior como,

$$-\partial_0\partial_j\left(-4ke\Sigma^{a0j}\right)+k\partial_j\left[ee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^{j}{}_{m}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]+\partial_j\left(ee^{a}{}_{m}T^{jm}\right)=0. \quad (3.1.1)$$

Com o auxílio da expressão (2.4.1) do momento canônico Π^{aj}, podemos reescrever a equação (3.1.1) como,

$$-\partial_0\partial_j\left(\Pi^{aj}\right)+k\partial_j\left[ee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^j{}_m\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]+\partial_j\left(ee^a{}_mT^{jm}\right)=0\,.$$

Integrando esta equação em um volume V do espaço tridimensional chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[-\int_V d^3x\,\partial_j\left(\Pi^{aj}\right)\right]=-k\int_S dS_j\left[ee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^j{}_m\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ -\int_S dS_j\left(ee^a{}_mT^{jm}\right).\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Através da expressão (2.4.4), podemos identificar o lado esquerdo de (3.1.2) como a derivada temporal do vetor energia-momento. Como a derivada temporal do vetor energia-momento é menos o fluxo de energia-momento, podemos reescrever a equação (3.1.2) como,

$$\frac{d}{dt}\left[-\int_V d^3x\,\partial_j\left(\Pi^{aj}\right)\right]=-\Phi_g^a-\Phi_m^a \tag{3.1.3}$$

onde

$$\Phi_g^a=k\int_S dS_j\left[ee^{am}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm}-d^j{}_m\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right] \tag{3.1.4}$$

é a componente a do fluxo de energia-momento gravitacional, e

$$\Phi_m^a=\int_S dS_j\left(ee^a{}_mT^{jm}\right)$$

é a componente a do fluxo de energia-momento material.

Das equações (3.1.3) e (2.4.3) chegamos à equação de perda de energia gravitacional $P^{(0)}=E$,

$$\frac{dE}{dt}=-\Phi_g^{(0)}-\Phi_m^{(0)}\,. \tag{3.1.5}$$

3.2 Escolha das tétradas

As tétradas podem ser consideradas como uma transformação de coordenadas $dq^a = e^a{}_m(x)dx^m$, entre e as coordenadas x^m do espaço-tempo físico e as coordenadas q^a de um espaço-tempo de referência [4].

Se os dois sistemas de coordenadas descreverem o espaço-tempo de Minkowski, então as tétradas serão determinadas por,

$$e^a{}_m = \frac{\partial q^a}{\partial x^m}. \tag{3.2.1}$$

Neste caso a transformação $dq^a = e^a{}_m(x)dx^m$ poderá ser integrada globalmente e a transformação será chamada de holonômica.

No caso geral, a transformação $dq^a = e^a{}_m(x)dx^m$ não poderá ser integrada globalmente, já que as tétradas não serão dadas por funções gradiente do tipo (3.2.1). Se as tétradas forem tais que $T^a{}_{mn} = \partial_m e^a{}_v - \partial_n e^a{}_m \neq 0$, então a transformação é chamada de não-holonômica.

Como no TEGR a presença de um campo gravitacional corresponde a um tensor de torção não nulo $T^a{}_{mn} \neq 0$, podemos descrever os campos gravitacionais por um espaço-tempo físico que é não-holonomicamente relacionado ao espaço-tempo de Minkowski, tomado como o espaço-tempo de referência.

Considerando uma rotação entre dois sistemas de coordenadas cartesianas no espaço-tempo plano, $q^0 = t$, $q^1 = x^1 \cos w(t) - x^2 sen w(t)$, $q^2 = x^1 sen w(t) + x^2 \cos w(t)$, $q^3 = x^3$, temos as tétradas,

$$e^a{}_m(t,x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(x^1 senw + x^2\cos w\right)\dot{w} & \cos w & -senw & 0 \\ \left(x^1\cos w - x^2\cos w\right)\dot{w} & senw & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $w(t)$ é uma função arbitrária. Estas tétradas descrevem um espaço-tempo de referencia com coordenadas q^a que está rodando em respeito ao espaço-tempo plano com coordenadas cartesianas x^m. Podemos verificar o aparecimento de componentes anti-simétricos na seção espacial de $e^a{}_m$, (i.e. $e^{(i)}{}_j$), que é uma característica geral em coordenadas cartesianas. Portanto, o aparecimento de componentes anti-simétricas em $e_{(i)j}(t,x,y,z)$ é esperado se dois espaços-tempos estiverem rodando um em relação ao outro.

Para um boost entre dois sistemas de coordenadas cartesianas no espaço-tempo plano, $q^{(0)}=g\left[t+\left(v/c^2\right)x^1\right]$, $q^{(1)}=g\left(x^1+vt\right)$, $q^{(2)}=x^2, q^3=x^3$, onde $g=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, temos as tétradas,

$$e^a{}_m(t,x,y,z)=\begin{pmatrix} g & \left(v/c^2\right)g & 0 & 0 \\ vg & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas tétradas não satisfazem a condição de calibre temporal $e^{(0)}{}_k=0$, já que $e^{(0)}{}_1=\left(v/c^2\right)g$. Para um boost arbitrário irão aparecer termos tais que $e^{(0)}{}_k\neq 0$, que violam a condição de calibre temporal.

Portanto, para que o espaço-tempo de referencia não esteja relacionado nem por uma rotação nem por um boost com o espaço-tempo físico, as tétradas, em coordenadas cartesianas, devem satisfazer as propriedades,

$$e_{(i)j} = e_{(j)i} \, , \tag{3.2.2}$$

$$e_{(i)}{}^{0} = e^{(0)}{}_{k} = 0 \, , \tag{3.2.3}$$

Estas condições fixam seis graus de liberdade das tétradas e apesar de terem sido obtidas no caso de tétradas para o espaço-tempo plano, elas também devem ser válidas no caso de campos gravitacionais arbitrários.

De acordo com a relação (2.2.2), temos infinitas tétradas associadas a uma mesma métrica. Para a escolha das tétradas, podemos assumir que elas satisfaçam as propriedades do tipo das equações (3.2.2) e (3.2.3). Em geral as seis condições acima sobre as tétradas caracterizam um observador estático em relação à distribuição de matéria e a um campo gravitacional assintoticamente plano.

Além de satisfazer as equações (2.2.2), (3.2.2) e (3.2.3), quando os parâmetros físicos do sistema são anulados as tétradas devem descrever a métrica correspondente ao espaço-tempo de Minkowski e conduzir a um tensor de torção $T_{amn} = \partial_m e_{an} - \partial_n e_{am}$ nulo, em qualquer sistema de coordenadas [42].

3.3 Ondas gravitacionais planas

Uma onda gravitacional é a propagação no espaço-tempo de um distúrbio ocorrido em um campo gravitacional. Em uma região longe o suficiente deste distúrbio, teremos um campo gravitacional fraco, mas não estacionário. Neste caso, o espaço-tempo será aproximadamente plano, sendo sua métrica dada por:

$$g_{mn} = h_{mn} + h_{mn} \ , \tag{3.3.1}$$

onde h_{mn} é a métrica de Minkowski e h_{mn} são pequenas correções $\left(\left|h_{mn}\right| \ll 1\right)$, determinadas pelo campo gravitacional. Portanto, devemos desprezar os termos em h_{mn} de ordem maior do que a primeira (aproximação linear).

Substituindo a métrica (3.3.1) na conexão afim (1.2.5) e desprezando os termos em h_{mn} de ordem maior do que a primeira, obtemos a conexão afim,

$$\Gamma^{l}{}_{mn} = \frac{1}{2} h^{lb} \left(\partial_n h_{bm} + \partial_m h_{nb} - \partial_b h_{mn} \right).$$

Utilizando esta conexão afim no tensor de curvatura (1.2.6) e, de novo, desprezando os termos em h_{mn} de ordem maior do que a primeira, é fácil de demonstrar que,

$$R^{a}{}_{bmn} = \frac{1}{2}\left(\partial_m \partial_b h^{a}{}_{n} + \partial_n \partial^{a} h_{bm} - \partial_n \partial_b h^{a}{}_{m} - \partial_m \partial^{a} h_{bn} \right).$$

A partir deste tensor de curvatura chegamos ao tensor de Ricci,

$$R_{mn} = h^{ab} R_{ambn} = \frac{1}{2}\left(\partial_n \partial_a h^{a}{}_{m} + \partial_m \partial_a h^{a}{}_{n} - \partial_m \partial_n h - \Box\, h_{mn} \right), \tag{3.3.2}$$

onde $\Box$ é o operador D'Alembertiano,

$$\Box = \partial_a \partial^{a} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

e ao escalar de curvatura,

$$R = \frac{1}{2}\left(\partial_a \partial_n h^{an} + \partial_a \partial^n h^a{}_n - \Box h - \Box h\right)$$
$$= \left(\partial_a \partial_b h^{ab} - \Box h\right). \qquad (3.3.3)$$

Substituindo as expressões (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) nas equações de Einstein (2.3.14), encontramos as equações de Einstein de campo fraco,

$$\frac{1}{2}\left(\partial_n \partial_a h^a{}_m + \partial_m \partial_a h^a{}_n - \partial_m \partial_n h - \Box h_{mn} - h_{mn} \partial_a \partial_b h^{ab} + h_{mn} \Box h\right) = \frac{1}{2k} T_{mn} \,. \qquad (3.3.4)$$

Estas equações são invariantes sob a transformação de calibre (gauge),

$$h_{mn} \rightarrow h_{mn} + \partial_n \Lambda_m + \partial_m \Lambda_n \,,$$

onde Λ_m é um campo vetorial arbitrário. Para fixar o gauge, podemos impor a condição de gauge,

$$\partial_m \left(h^m{}_n - \frac{1}{2} h^m{}_n h \right) = 0 \,, \qquad (3.3.5)$$

na equação (3.3.4), obtendo assim,

$$\Box \left(h_{mn} - \frac{1}{2} h_{mn} h \right) = \frac{1}{2k} T_{mn} \,. \qquad (3.3.6)$$

Se definirmos uma nova variável de campo,

$$y_{mn} = h_{mn} - \frac{1}{2} h_{mn} h \,, \qquad (3.3.7)$$

podemos reescrever a equação de campo (3.3.6) como,

$$\Box y_{mn} = \frac{1}{2k} T_{mn} \,, \qquad (3.3.8)$$

e a condição de gauge (3.3.5) como,

$$\partial_m y^{mn} = 0 \,. \qquad (3.3.9)$$

No vácuo, a equação de campo (3.3.8) se reduz à equação de onda,

$$\Box y_{mn} = 0 . \qquad (3.3.10)$$

Considerando o traço desta equação e utilizando a relação (3.3.7) temos que,

$$h^{mn} \Box y_{mn} = -\Box h = 0 .$$

Combinando este resultado com (3.3.10) e (3.3.7), vemos que h_{mn} também satisfaz a equação de onda,

$$\Box h_{mn} = 0 . \qquad (3.3.11)$$

Esta equação possui solução do tipo,

$$h_{mn} = A_{mn} e^{(ik_a x^a)} ,$$

onde A_{mn} é um tensor constante, chamado de tensor de polarização, e k_a é um vetor constante, chamado de vetor de onda. Esta solução é chamada de onda plana linear e só sua parte real,

$$h_{mn} = A_{mn} \cos(k_a x^a) , \qquad (3.3.12)$$

possui significado físico. Substituindo esta solução na equação de onda (3.3.11) obtemos a relação,

$$k^a k_a h_{mn} = 0 ,$$

que se anula somente se,

$$k^a k_a = 0 . \qquad (3.3.13)$$

É conveniente se referir à componente k^0 como w, que é a freqüência da onda. Sendo assim, de acordo com a identidade (3.3.13) temos que,

$$k^0 = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = |\vec{k}| ,$$

e conseqüentemente $w / |\vec{k}| = 1$, de onde podemos concluir que a onda se propaga à velocidade da luz.

Pelo fato de h_{mn} ser simétrico, então o tensor A_{mn} também deve ser simétrico, fazendo com que A_{mn} possua dez componentes independentes. Substituindo a onda plana (3.3.12) na condição de gauge (3.3.5) chegamos à relação,

$$A_{mn} k^{m} = 0 , \tag{3.3.13}$$

que irá fixar mais quatro graus de liberdade de A_{mn}. Desta forma, o tensor A_{mn} possuirá apenas seis componentes independentes e, portanto, existirão apenas seis tensores de polarização linearmente independentes que serão solução de (3.3.13).

O vetor k^{a} de uma onda gravitacional se propagando na direção *z* é dado por,

$$k^{a} = (w,0,0,w) .$$

Portanto, para este tipo de propagação, a onda plana (3.3.12) assume a forma,

$$h_{mn} = A_{mn} \cos(w\, z - w\, t) .$$

Neste caso particular, as únicas polarizações que serão soluções de (3.3.13) e que irão corresponder a ondas gravitacionais físicas são as polarizações transversas [9],

$$A_{mn}{}^{\oplus} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A_{mn}{}^{\otimes} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[9] referência [7] seção 5.1.

Para uma onda se propagando na direção z com uma polarização $A_{mn}^{\oplus}$ ($A_{xy}=0$), teremos um h_{mn} dado por,

$$h_{mn}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A\cos w(z-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A\cos w\,(z-t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substituindo h_{mn} em (3.3.1) chegamos ao tensor métrico,

$$g_{mn}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A\cos w(z-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-A\cos w\,(z-t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.3.14)$$

do qual obtemos o elemento de linha (1.1.2),

$$ds^2=-dt^2+\left[1+f_+(t-z)\right]dx^2+\left[1-f_+(t-z)\right]dy^2+dz^2\,,$$

onde,

$$f_+(t-z)=A\cos w(z-t)\,. \qquad (3.3.15)$$

3.4 O fluxo de energia-momento de ondas gravitacionais planas

Para o cálculo dos fluxos de energia e momento de ondas gravitacionais planas lineares, restringiremos nossas considerações a uma onda se propagando na direção z com uma polarização $A_{mn}^{\oplus}$, que, como vimos na seção anterior, é caracterizada pelo tensor métrico (3.3.14).

Através da relação $g^{mn} g_{ml} = d^{n}{}_{l}$ obtemos o tensor métrico inverso à (3.3.14),

$$g^{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1+f_+)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(1-f_+)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A tétrada obtida da relação (2.2.2) que irá resultar no tensor métrico (3.3.14) e irá satisfazer as condições (3.2.2) e (3.2.3) é dada por,

$$e^{a}{}_{m}(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+f_+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-f_+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.4.1)$$

de onde obtemos $e = \sqrt{1+f_+}\sqrt{1-f_+}$.

Utilizando esta tétrada no tensor de torção $T_{amn} = \partial_m e_{an} - \partial_n e_{am}$, onde $e_{am} = h_{ab} e^{b}{}_{m}$, vemos que os únicos componentes que não irão se anular são,

$$T_{(1)01} = \frac{\dot{f}_+}{2\sqrt{1+f_+}},$$

$$T_{(2)02} = -\frac{\dot{f}_+}{2\sqrt{1-f_+}} \,,$$

$$T_{(1)13} = -\frac{f'_+}{2\sqrt{1+f_+}} \,,$$

$$T_{(2)23} = \frac{f'_+}{2\sqrt{1-f_+}} \,,$$

onde o ponto e a linha denotam derivada com respeito às coordenadas t e z, respectivamente. Dos componentes acima e da tétrada (3.4.1) obtemos os componentes do tensor de torção $T_{lmn} = e^a{}_l T_{amn}$,

$$T_{101} = \frac{1}{2}\dot{f}_+ \,, \tag{3.4.2}$$

$$T_{202} = -\frac{1}{2}\dot{f}_+ \,, \tag{3.4.3}$$

$$T_{113} = -\frac{1}{2}f'_+ \,, \tag{3.4.4}$$

$$T_{223} = \frac{1}{2}f'_+ \,. \tag{3.4.5}$$

Como estas são os únicos componentes do tensor de torção que não se anulam, pode-se mostrar que o fluxo de energia gravitacional, que é dado pelo componente a = (0) em (3.1.4), irá se reduzir a,

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= k\int_S dS_j \left[ee^{(0)m}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm} - d^{\,j}{}_m \Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right] \\ &= 4k\int_S dS_j\, ee^{(0)0}\Sigma^{lnj}T_{ln0} \\ &= -4k\int_S dS_j\, eg^{00}e^{(0)}{}_0\left(\Sigma^{11j}T_{101} + \Sigma^{22j}T_{202}\right), \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

onde utilizamos $T_{lnm} = -T_{lmn}$.

Para desenvolvermos a equação (3.4.6) devemos calcular o tensor (2.3.7), e para isso precisamos do traço $T^m = g^{mn} T_n = g^{mn} T^l{}_{ln}$. O cálculo dos componentes deste traço irá resultar em,

$$T^1 = 0\,,$$

$$T^2 = 0\,,$$

$$T^3 = g^{11} g^{33} T_{113} + g^{22} g^{33} T_{223}\,.$$

Com estes resultados e os componentes do tensor de torção (3.4.2) – (3.4.5), ao considerarmos $j = 1$ na equação (3.4.6) encontramos,

$$\Sigma^{221} T_{202} = T_{202} \left[\frac{1}{4}\left(T^{221} + T^{221} - T^{122} \right) + \frac{1}{2}\left(g^{21} T^2 - g^{22} T^1 \right) \right] = 0\,.$$

Similarmente, para $j = 2$ na equação (3.4.6) temos,

$$\Sigma^{112} T_{101} = T_{101} \left[\frac{1}{4}\left(T^{112} + T^{112} - T^{211} \right) + \frac{1}{2}\left(g^{12} T^1 - g^{11} T^2 \right) \right] = 0\,.$$

Portanto, a integração em $j = 1$ e $j = 2$ não irá contribuir para $\Phi^{(0)}$. A única contribuição para $\Phi^{(0)}$ vem da integração na superfície constante arbitrária z ($j = 3$), que é a superfície ortogonal à propagação das ondas. Fazendo $j = 3$ em (3.4.6) chegamos a

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)} &= -4k \int_S dS_3 \, e g^{00} e^{(0)}{}_0 \left(\Sigma^{113} T_{101} + \Sigma^{223} T_{202} \right) \\
&= 4k \int_S dS_3 \, e \left\{ T_{101} \left[\frac{1}{4}\left(T^{113} + T^{113} - T^{311} \right) + \frac{1}{2}\left(g^{13} T^1 - g^{11} T^3 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + T_{202} \left[\frac{1}{4}\left(T^{223} + T^{223} - T^{322} \right) + \frac{1}{2}\left(g^{23} T^2 - g^{22} T^3 \right) \right] \right\} \\
&= -2k \int_S dS_3 \, e \left[g^{11} g^{22} g^{33} \left(T_{101} T_{223} + T_{202} T_{113} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Substituindo as equações (3.4.2) – (3.4.5) e os componentes do tensor métrico inverso na equação (3.4.7) achamos

$$\Phi^{(0)} = -k\int_S dS_3 \frac{\dot{f}_+ f'_+}{\sqrt{1-\left(f_+\right)^2}} .$$

Já que a função f_+ é tal que $\left(f_+\right)^2 \ll 1$, podemos realizar uma aproximação na equação anterior, obtendo assim,

$$\Phi^{(0)} = -k\int_S dS_3 \dot{f}_+ f'_+ . \qquad (3.4.8)$$

Assumindo que a função f_+ é dada por (3.3.15), temos que,

$$\dot{f}_+(t-z) = A\, w\, sen\, w(z-t) ,$$

$$f'_+(t-z) = -A\, w\, sen\, w(z-t) .$$

Substituindo estas relações e fazendo $k = 1/16p$ em (3.4.8) encontramos

$$\Phi^{(0)} = \frac{A^2 w^2}{16p} sen^2(w\,t - w\,z)\int_S dS_3 , \qquad (3.4.9)$$

onde S é uma superfície arbitrária definida por $z = \text{constante}$.

O valor médio de $\Phi^{(0)}$ sob um período T é dado por,

$$\int_0^T dt\ sen^2(w\,t - w\,z) = \frac{T}{2} .$$

Levando em consideração a integral anterior na equação (3.4.9), obtemos a densidade de fluxo de energia média $\left\langle \Phi^{(0)3} \right\rangle$ por unidade de período T, fluindo na direção z,

$$\frac{\left\langle \Phi^{(0)3} \right\rangle}{T} = \frac{A^2 w^2}{32p} . \qquad (3.4.10)$$

Este resultado está de acordo com valor do fluxo de energia de uma onda gravitacional plana linearizada, obtido na literatura [43] através da consideração da energia fornecida pelas ondas gravitacionais para uma distribuição contínua de osciladores em um plano ortogonal à direção de propagação da onda.

Para chegarmos às componentes $\Phi^{(i)}$ do fluxo de momento precisamos calcular o escalar (2.3.6), que irá resultar em,

$$\Sigma^{bcd}T_{bcd} = -2\left(g^{11}g^{22}g^{33}T_{113}T_{223} + g^{11}g^{22}g^{33}T_{101}T_{202}\right). \qquad (3.4.11)$$

Também podemos verificar, através de cálculos simples, que,

$$\Sigma^{mn1}T_{mn1} = -\frac{1}{2}\left(g^{00}g^{11}g^{22}T_{101}T_{202} + g^{11}g^{22}g^{33}T_{113}T_{223}\right), \qquad (3.4.12)$$

e

$$\Sigma^{mn2}T_{mn1} = \Sigma^{mn3}T_{mn1} = 0. \qquad (3.4.13)$$

Substituindo as equações (3.4.11) – (3.4.13) no fluxo de momento $\Phi^{(1)}$ que é dado por,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= k\int_S dS_j\left[ee^{(1)1}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bc1} - d^j{}_1\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &= k\int_S dS_1\left[ee^{(1)1}\left(4\Sigma^{bc1}T_{bc1} - d^j{}_1\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &\quad + k\int_S dS_2\left[4ee^{(1)1}\Sigma^{mn2}T_{mn1}\right] + k\int_S dS_3\left[4ee^{(1)1}\Sigma^{mn3}T_{mn1}\right],\end{aligned} \qquad (3.4.14)$$

concluímos que $\Phi^{(1)} = 0$.

Um resultado similar é obtido para $\Phi^{(2)}$, que é dado por,

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} &= k\int_S dS_j\left[ee^{(2)2}\left(4\Sigma^{mnj}T_{mn2} - d^j{}_2\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &= k\int_S dS_1\left[4ee^{(2)2}\Sigma^{mn1}T_{mn2}\right] + k\int_S dS_2\left[ee^{(2)2}\left(4\Sigma^{mn2}T_{mn2} - \Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &\quad + k\int_S dS_3\left[4ee^{(2)2}\Sigma^{mn3}T_{mn2}\right].\end{aligned} \qquad (3.4.15)$$

Neste caso temos

$$\Sigma^{mn2}T_{mn2} = -\frac{1}{2}\left(g^{00}g^{11}g^{22}T_{101}T_{202} + g^{11}g^{22}g^{33}T_{113}T_{223}\right), \qquad (3.4.16)$$

e

$$\Sigma^{mn1}T_{mn2} = \Sigma^{mn3}T_{mn2} = 0. \qquad (3.4.17)$$

Considerando as equações (3.4.16) e (3.4.17), concluímos que a equação (3.4.15) se reduz a $\Phi^{(2)}=0$. Finalmente, para $\Phi^{(3)}$ temos,

$$\begin{aligned}\Phi^{(3)} &= k\int_S dS_j\left[ee^{(3)3}\left(4\Sigma^{mn\,j}T_{mn\,3}-d^{j}{}_{3}\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &= k\int_S dS_1\left[4ee^{(3)3}\Sigma^{mn\,1}\,T_{mn\,3}\right]+k\int_S dS_2\left[4ee^{(3)3}\Sigma^{mn\,2}T_{mn\,3}\right]\\ &\quad +k\int_S dS_3\left[ee^{(3)3}\left(4\Sigma^{mn\,3}T_{mn\,3}-\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Através de cálculos simples chegamos a,

$$\Sigma^{mn\,3}T_{mn\,3}=-g^{11}g^{22}g^{33}\,T_{113}T_{223}\,, \tag{3.4.19}$$

e

$$\Sigma^{mn1}T_{mn3}=\Sigma^{mn\,2}T_{mn\,3}=0\,. \tag{3.4.20}$$

Substituindo as equações (3.4.11), (3.4.19) e (3.4.20) na equação (3.4.18) obtemos,

$$\Phi^{(3)}=k\int_S dS_3\left[ee^{3}{}_{(3)}g^{33}\left(2g^{00}g^{22}g^{22}T_{101}T_{202}-2g^{11}g^{22}g^{33}T_{113}T_{223}\right)\right]. \tag{3.4.21}$$

Com o auxílio das equações (3.4.2) – (3.4.5) chegamos à seguinte expressão para a equação (3.4.21),

$$\Phi^{(3)}=k\int_S dS_3\,\frac{\left(f_+'\right)^2+\left(\dot f_+\right)^2}{2\sqrt{1-\left(f_+\right)^2}}\,.$$

Levando em consideração a equação (3.3.15) observamos que,

$$\left(f_+'\right)^2+\left(\dot f_+\right)^2=\left(f_+'+\dot f_+\right)^2-2f_+'\dot f_+=-2f_+'\dot f_+\,,$$

onde utilizamos $f_+'=-\dot f_+$. Com o auxílio desta identidade teremos a aproximação,

$$\Phi^{(3)}=-k\int_S dS_3\,\frac{f_+'\dot f_+}{\sqrt{1-\left(f_+\right)^2}}\approx -k\int_S dS_3 f_+'\dot f_+\,,$$

em similaridade com os mesmos argumentos utilizados para o calculo de $\Phi^{(0)}$.

Portanto, a expressão para $\Phi^{(3)}$ é idêntica à expressão de $\Phi^{(0)}$,

$$\Phi^{(3)} = \frac{A^2 w^2}{16p} sen^2(w\,t - w\,z)\int_S dS_3 \,.$$

Calculando o valor médio $\left\langle \Phi^{(3)} \right\rangle$ sob um período *T*, obtemos a densidade de fluxo de momento média $\left\langle \Phi^{(3)3} \right\rangle$ por unidade de período *T*, fluindo ao longo da direção *z*,

$$\frac{\left\langle \Phi^{(3)3} \right\rangle}{T} = \frac{A^2 w^2}{32p} \,. \tag{3.4.22}$$

Comparando as expressões (3.4.10) e (3.4.22) vemos que a densidade do fluxo de energia e de momento por unidade de tempo de uma onda gravitacional plana linear, ao longo da direção de propagação, são iguais. Desta igualdade segue que os fluxos satisfazem à relação,

$$\Phi^a \Phi_b h_{ab} = 0 \,. \tag{3.4.23}$$

Notamos que uma relação similar a esta deve ser satisfeita pelo quadri-vetor de partículas de massa nula, e que as ondas eletromagnéticas planas possuem a mesma característica dos fluxos de energia e momento acima. Em unidades naturais (c = 1), as ondas eletromagnéticas também satisfazem a equação (3.4.23).

4. RADIAÇÃO GRAVITACIONAL E O FLUXO DE ENERGIA DA MATÉRIA

4.1 Métrica de Bondi

A métrica de Bondi descreve a radiação gravitacional de um sistema isolado, axialmente simétrico e não-girante em um espaço-tempo assintoticamente plano [44], ou seja, ela descreve a forma assintótica de uma solução radiativa das equações de Einstein. Neste caso será de nosso interesse o comportamento do campo gravitacional a grandes distâncias do sistema radiativo. Devemos então escolher um sistema de coordenadas que nos dê expansões apropriadas a grandes distâncias do sistema radiativo, na forma mais simples possível. Para isso, é desejável definir coordenadas em que termos do tipo $\ln r$ não apareçam, já que este tipo de termo não permite expansões em termos de potências negativas de r. Também é importante verificar que tais expansões não precisam ser analíticas, já que as soluções de equações hiperbólicas, que é o caso das equações de Einstein, não são necessariamente analíticas.

O sistema de coordenadas que Bondi et al. definiram para descrever a métrica de Bondi, e que preenche todos os requisitos discutidos acima, foi o sistema de coordenadas de radiação $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv \left(u, r, q, f\right)$, onde, a longas distâncias, r, q e f são as coordenadas esféricas usuais e u é o tempo retardado $u = t - r$. As superfícies nas quais $u =$ constante são hipersuperfícies nulas.

Ao longo de uma geodésica nula (ou raio nulo) as coordenadas (u, q, f) são constantes e r é uma parâmetro radial, chamado de distância de luminosidade, definido pela condição,

$$r^4 sen^2 q = g_{22} g_{33}, \qquad (4.1.1)$$

que garante que a área de uma hipersuperfície bidimensional $u = \text{constante}$, $r = \text{constante}$ seja igual á $4pr^2$. Já que a única coordenada que varia ao longo de um raio nulo é a coordenada r, o termo g_{11} da métrica deve se anular. Além disso, devemos ter [44],

$$\Gamma^0{}_{11} = \Gamma^2{}_{11} = 0\,,$$

o que juntamente com a restrição $g_{11} = 0$ irá resultar em $g_{12} = 0$, levando-se em consideração que u é uma coordenada do tipo-tempo ($g_{00} < 0$). Portanto a métrica será limitada pelas condições,

$$g_{11} = g_{12} = 0\,. \tag{4.1.2}$$

A métrica que descreve um espaço-tempo associado a uma fonte axialmente simétrica deve ser independente da coordenada azimutal f,

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial f} = 0\,. \tag{4.1.3}$$

Se a fonte for não-girante não devem aparecer termos cruzados em df, no elemento de linha, $ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$, o que implica em,

$$g_{30} = g_{31} = g_{32} = 0\,. \tag{4.1.4}$$

Considerando as condições (4.1.1) – (4.1.4) e as características do sistema de coordenadas radiativo, Bondi et al. chegaram ao elemento de linha associado à métrica de Bondi [44],

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(\frac{V}{r}e^{2b} - U^2 r^2 e^{2g}\right)du^2 - 2e^{2b}dudr - Ur^2 e^{2g}dudq \\ &+ r^2\left(e^{2g}dq^2 + e^{-2g}sen^2 q\, df^2\right), \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

onde as quantidades V, U, b e g são funções de u, r e q, que são determinadas através das equações de campo para o vácuo e pela condição de casualidade, assumindo-se expansões em termos de $1/r$ [44]. Estas funções possuem os seguintes comportamentos assintóticos,

$$b = -\frac{c^2}{4r^2} + \ldots,$$

$$g = \frac{c}{r} + \ldots,$$

$$\frac{V}{r} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial d}{\partial q} + d\cos q - \left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2 - 4c\left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)\cot q - \frac{1}{2}c^2\left(1 + 8\cot^2 q\right)\right] + \ldots,$$

$$U = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial c}{\partial q} + 2c\cot q\right) + \frac{1}{r^3}\left(2d + 3c\frac{\partial c}{\partial q}\cot q + 4c^2\cot q\right) + \ldots,$$

onde $M = M(u,q)$ e $d = d(u,q)$ são o aspecto de massa e o aspecto de dipolo, respectivamente, e da função $c(u,q)$ é definida a "*news function*" $\dot{c} = \left(\partial c / \partial u\right)$, que propaga a informação sobre o sistema. Do elemento de linha (4.1.5) verificamos que o tensor métrico possui a forma,

$$g_{mn}(u,r,q,f) = \begin{pmatrix} -\frac{V}{r}e^{2b} + U^2r^2e^{2g} & -e^{2b} & -Ur^2e^{2g} & 0 \\ -e^{2b} & 0 & 0 & 0 \\ -Ur^2e^{2g} & 0 & r^2e^{2g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2e^{-2g}sen^2q \end{pmatrix},$$

do qual, através da relação $g^{mn}g_{ml} = d^n{}_l$, obtemos o tensor métrico inverso,

$$g^{mn}(u,r,q,f) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2b} & 0 & 0 \\ -e^{-2b} & e^{-2b}\frac{V}{r} & -e^{-2b}U & 0 \\ 0 & -e^{-2b}U & \frac{e^{-2g}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2g}}{r^2sen^2q} \end{pmatrix}. \qquad (4.1.6)$$

4.2 Tétradas para o espaço-tempo de Bondi

O uso do tempo retardado u para a descrição da métrica radiante de Bondi resulta em uma condição de superfície nula $g^{00} = 0$. No entanto não é possível se ter ao mesmo tempo a condição $g^{00} = 0$ e a condição de gauge temporal (3.2.3), pois as duas condições implicam, simultaneamente, em,

$$e_a{}^0 = 0 \Rightarrow \det\left(e_a{}^m\right) = e^{-1} = 0\,,$$

e, portanto,

$$e \to \infty\,.$$

Sendo assim, já que a métrica de Bondi resulta em $g^{00} = 0$, a tétrada para o espaço-tempo de Bondi irá violar a condição de gauge temporal.

Como vimos na seção 3.2, a violação da condição de gauge temporal, no espaço-tempo plano, está associada a um boost do espaço-tempo físico com coordenadas x^m em respeito ao espaço-tempo de referência com coordenadas q^a. Este boost escolhe uma direção particular no espaço. No caso de um campo gravitacional radiante, a violação da condição de gauge temporal não deve privilegiar nenhuma direção no espaço, ou seja, ela deve ser isotrópica.

Através de uma transformação de coordenada $t \to u$, onde $u = t - r$ é o tempo retardado e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, na tétrada para o espaço-tempo plano em coordenadas cartesianas $e^a{}_m(t,x,y,z) = d^a{}_m$, obtemos a tétrada,

$$e^a{}_m(u,x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.2.1)$$

que apresenta uma violação isotrópica da condição de gauge temporal.

Realizando uma transformação de coordenadas $(u,x,y,z)\to(u,\rho,\theta,\phi)$ em (4.2.1) encontramos,

$$e^{\alpha}{}_{\mu}(u,\rho,\theta,\phi)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & sen\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho sen\theta sen\phi\\ 0 & sen\theta sen\phi & \rho\cos\theta sen\phi & \rho sen\theta\cos\phi\\ 0 & \cos\theta & -\rho sen\theta & 0\end{pmatrix}. \qquad (4.2.2)$$

A tétrada $e^{\alpha}{}_{\mu}(u,\rho,\theta,\phi)$ mais simples que nos leva ao elemento de linha (4.1.5) é precisamente aquela para a qual a violação da condição de gauge temporal possui uma forma similar à encontrada em (4.2.1). A tétrada que satisfaz estas condições é dada por,

$$e^{\alpha}{}_{\mu}(u,\rho,\theta,\phi)=\begin{pmatrix}A & B & 0 & 0\\ C\cos\theta\cos\phi & Bsen\theta\cos\phi & \rho e^{\gamma}\cos\theta\cos\phi & -\rho e^{-\gamma}sen\theta sen\phi\\ C\cos\theta sen\phi & Bsen\theta sen\phi & \rho e^{\gamma}\cos\theta sen\phi & \rho e^{-\gamma}sen\theta\cos\phi\\ -Csen\theta & B\cos\theta & -\rho e^{\gamma}sen\theta & 0\end{pmatrix}, \qquad (4.2.3)$$

onde as funções A, B e C são definidas por

$$A=e^{\beta}\left(\frac{V}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B=e^{\beta}\left(\frac{V}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$C=-U\rho e^{\gamma}\ .$$

Por meio de uma transformação de coordenadas,

$$e^{\alpha}{}_{\nu}(u,x,y,z)=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}e^{\alpha}{}_{\mu}(u,\rho,\theta,\phi),$$

chegamos aos elementos da tétrada (4.2.3) em coordenadas cartesianas,

$$e^{(0)}{}_{0}(u,x,y,z)=A,$$

$$e^{(0)}{}_1(u,x,y,z) = \frac{x}{r}B\,, \tag{4.2.4}$$

$$e^{(0)}{}_2(u,x,y,z) = \frac{y}{r}B\,, \tag{4.2.5}$$

$$e^{(0)}{}_3(u,x,y,z) = \frac{z}{r}B\,, \tag{4.2.6}$$

$$e^{(1)}{}_0(u,x,y,z) = C\frac{xz}{r\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

$$e^{(1)}{}_1(u,x,y,z) = B\frac{x^2}{r^2} + \frac{e^g x^2 z^2}{r^2\left(x^2+y^2\right)} + \frac{e^{-g}y^2}{x^2+y^2}\,,$$

$$e^{(1)}{}_2(u,x,y,z) = B\frac{xy}{r^2} + \frac{e^g xyz^2}{r^2\left(x^2+y^2\right)} - \frac{e^{-g}xy}{x^2+y^2}\,,$$

$$e^{(1)}{}_3(u,x,y,z) = B\frac{xz}{r^2} - \frac{e^g xz}{r^2}\,,$$

$$e^{(2)}{}_0(u,x,y,z) = C\frac{yz}{r\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

$$e^{(2)}{}_1(u,x,y,z) = B\frac{xy}{r^2} + \frac{e^g xyz^2}{r^2\left(x^2+y^2\right)} - \frac{e^{-g}xy}{x^2+y^2}\,,$$

$$e^{(2)}{}_2(u,x,y,z) = B\frac{y^2}{r^2} + \frac{e^g y^2 z^2}{r^2\left(x^2+y^2\right)} + \frac{e^{-g}x^2}{x^2+y^2}\,,$$

$$e^{(2)}{}_3(u,x,y,z) = B\frac{yz}{r^2} - \frac{e^g yz}{r^2}\,,$$

$$e^{(3)}{}_0(u,x,y,z) = -C\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\,,$$

$$e^{(3)}{}_1(u,x,y,z) = B\frac{xz}{r^2} - \frac{e^g xz}{r^2}\,,$$

$$e^{(3)}{}_2(u,x,y,z) = B\frac{yz}{r^2} - \frac{e^g yz}{r^2}\,,$$

$$e^{(3)}{}_{3}(u,x,y,z) = B\frac{z^2}{r^2} + \frac{e^{g}\left(x^2 + y^2\right)}{r^2},$$

As equações (4.2.4) – (4.2.6) manifestam a violação do gauge temporal de forma semelhante à tétrada (4.2.1). Além disso, podemos verificar que os componentes espaciais da tétrada (4.2.3) em coordenadas cartesianas satisfazem à condição,

$$e_{(i)j}(u,x,y,z) = e_{(j)i}(u,x,y,z), \qquad (4.2.7)$$

Esta condição garante que o espaço físico com coordenadas x^m não está rodando em respeito ao espaço-tempo de referência com coordenadas q^a no caso limite de espaço plano (V=1, u= b =g =0).

A violação isotrópica da condição de calibre temporal, dada neste contexto pelas equações (4.2.4) – (4.2.6), juntamente com a condição dada por (4.2.7), fixa a estrutura de qualquer tétrada para tensores métricos de espaço-tempo radiantes, determinada em termos do tempo retardado u, no caso em que a imposição da condição de calibre temporal é problemática. Tal estrutura de tétradas é adaptada a observadores estáticos no infinito tipo espaço.

4.3 Energia de Bondi

Da equação (2.4.3) obtemos a expressão para a energia do campo gravitacional contida em uma região de volume finito V de uma hipersuperfície espacial tridimensional, limitada por uma superfície S de raio constante r,

$$\begin{aligned} E &= -\int_{V\to\infty} d^3x\partial_j \Pi^{(0)j} = -\int_{V\to\infty} d^3x\partial_j\left(-4ke\Sigma^{(0)0j}\right) \\ &= -\int_{S\to\infty} dS_j\left(-4ke\Sigma^{(0)0j}\right) = \int_{r\to\infty} dq\,df\left(4ke\Sigma^{(0)01}\right), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

onde $e = \sqrt{-g} = e^{2b}r^2sen^2q$.

Utilizando a equação (2.3.7) no tensor $\Sigma^{(0)01} = e^{(0)}{}_0\,\Sigma^{001} + e^{(0)}{}_j\Sigma^{j01}$ encontramos,

$$\Sigma^{(0)01} = \frac{1}{2}e^{(0)}{}_0\left(T^{001} + g^{01}T^0\right) + \frac{1}{2}e^{(0)}{}_1\left(T^{101} + g^{11}T^0 - g^{01}T^1\right). \tag{4.3.2}$$

Os seguintes componentes do tensor de torção $T_{amn} = \partial_m e_{an} - \partial_n e_{am}$, onde $e_{am} = h_{ab}e^b{}_m$ são obtidos da tétrada (4.2.3), não irão se anular:

$$T_{(0)01} = \partial_1 A - \partial_0 B\ ,$$

$$T_{(1)01} = \left(\partial_0 B\right)sen\,q\cos f - \left(\partial_1 C\right)\cos q\cos f\ ,$$

$$T_{(2)01} = \left(\partial_0 B\right)senq\,senf - \left(\partial_1 C\right)\cos q\,senf\ ,$$

$$T_{(3)01} = \partial_0 B\cos q + \left(\partial_1 C\right)senq\ ,$$

$$T_{(0)02} = \partial_2 A\ ,$$

$$T_{(1)02} = \left[\left(\partial_0 g\right)re^g - \left(\partial_2 C\right)\right]\cos q\cos f + Csenq\cos f\ ,$$

$$T_{(2)02} = \left[\left(\partial_0 g\right)re^g - \left(\partial_2 C\right)\right]\cos q\,senf + Csenq\,senf\ ,$$

$$T_{(3)02} = -\left[\left(\partial_0 g\right)re^g - \left(\partial_2 C\right)\right]senq + C\cos q\ ,$$

$$T_{(1)03} = \left(\partial_0 g\right) r e^{-g} sen q\, sen f + C \cos q\, sen f \ ,$$

$$T_{(2)03} = -\left(\partial_0 g\right) r e^{-g} sen q \cos f - C \cos q \cos f \ ,$$

$$T_{(0)12} = +\partial_2 B \ ,$$

$$T_{(1)12} = \left[e^{g} + \left(\partial_1 g\right) r e^{g} - B\right] \cos q \cos f - \left(\partial_2 B\right) sen q \cos f \ ,$$

$$T_{(2)12} = \left[e^{g} + \left(\partial_1 g\right) r e^{g} - B\right] \cos q\, sen f - \left(\partial_2 B\right) sen q\, sen f \ ,$$

$$T_{(3)12} = -\left[e^{g} + \left(\partial_1 g\right) r e^{g} - B\right] sen q - \left(\partial_2 B\right) \cos q \ ,$$

$$T_{(1)13} = -\left[e^{-g} - \left(\partial_1 g\right) r e^{-g} - B\right] sen q\, sen f \ ,$$

$$T_{(2)13} = \left[e^{-g} - \left(\partial_1 g\right) r e^{-g} - B\right] sen q \cos f \ ,$$

$$T_{(1)23} = r\left(e^{g} - e^{-g}\right) \cos q\, sen f + \left(\partial_2 g\right) r e^{-g} sen q\, sen f \ ,$$

$$T_{(2)23} = -r\left(e^{g} - e^{-g}\right) \cos q \cos f - \left(\partial_2 g\right) r e^{-g} sen q\, sen f \ ,$$

A partir destes componentes calculamos os componentes não nulos do tensor de torção $T_{lmn} = e^{a}{}_{l} T_{amn}$. Para propósito futuro, também iremos descrever o comportamento assintótico destes componentes em respeito a variável radial *r*, no limite $r \to \infty$,

$$T_{001} = \frac{1}{2}\partial_1\left(A^2 - C^2\right) - A\partial_0 B \simeq O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$T_{101} = B\partial_1 A \simeq O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$T_{002} = \frac{1}{2}\partial_2\left(A^2 - C^2\right) + C\left(\partial_0 g\right) r e^{g} \simeq O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$T_{102} = B\partial_2 A + BC \simeq O\left(\frac{1}{r}\right),$$

(4.3.3)

$$T_{202} = r e^{g}\left(\left(\partial_0 g\right) r e^{g} - \partial_2 C\right) \simeq O\left(r\right),$$

$$T_{303} = -(\partial_0 g) r^2 e^{-2g} sen^2 q - re^{-g} C senq \cos q \simeq O(r),$$

$$T_{012} = A\partial_2 B + C\left[e^g + (\partial_1 g) re^g - B\right] \simeq O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$T_{212} = re^g \left[e^g + (\partial_1 g) re^g - B\right] \simeq O(r),$$

$$T_{313} = re^{-g} \left[e^{-g} - (\partial_1 g) re^{-g} - B\right] \simeq O(r),$$

$$T_{323} = -r^2 (\partial_2 g) e^{-2g} sen^2 q - r^2 \left(1 - e^{-2g}\right) senq \cos q \simeq O\left(r^2\right).$$

Calculando os traços $T^m = g^{mn} T^l{}_{ln}$ obtemos,

$$T^0 = g^{01} g^{01} T_{101} - g^{01}\left(g^{22} T_{212} + g^{33} T_{313}\right),$$

$$\begin{aligned} T^1 = {} & -g^{01} g^{01} T_{001} + g^{01} g^{12}\left(T_{012} + T_{201}\right) - g^{11} g^{22} T_{212} + g^{11} g^{22} T_{313} \\ & - g^{01} g^{22} T_{202} + g^{01} g^{33} T_{303} - g^{12} g^{33} T_{323} + g^{12} g^{12} T_{212}, \end{aligned} \qquad (4.3.4)$$

$$T^2 = g^{01} g^{12} T_{101} - g^{12} g^{22} T_{212} - g^{12} g^{33} T_{313},$$

$$T^3 = 0.$$

Substituindo os traços (4.3.4) na equação (4.3.2) e realizando algumas simplificações, chegamos a,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)01} = {} & -\frac{1}{2} e^{(0)}{}_0 \left[g^{01} g^{01} g^{22} T_{212} + g^{01} g^{01} g^{33} T_{313}\right] \\ & + \frac{1}{2} e^{(0)}{}_1 \left[g^{01} g^{01} g^{22} T_{202} + g^{01} g^{01} g^{33} T_{303} + g^{01} g^{12} g^{33} T_{323}\right]. \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

Utilizando os componentes (4.3.3) em (4.3.5) encontramos,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)01} = {} & -\frac{1}{2r} e^{-3b} \left(\frac{V}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left[1 - e^{-g} e^{b} \left(\frac{V}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left[1 - e^{g} e^{b} \left(\frac{V}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\} \\ & + \frac{1}{2} e^{-3b} \left(\frac{V}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q}\left(U senq\right). \end{aligned}$$

Multiplicando esta equação pela determinante $e = e^{2b} r^2 senq$ obtemos

$$e\Sigma^{(0)01} = \frac{1}{2} r sen q \left[e^{g} + e^{-g} - 2e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} r^{2} e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q} \left(U sen q \right).$$

Substituindo a equação acima e fazendo $k = 1/16p$ em (4.3.1), encontramos uma expressão para a energia gravitacional total do espaço-tempo de Bondi,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4p} \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{2p} df \int_{0}^{p} dq \frac{1}{2} \left\{ r\, sen q \left[e^{g} + e^{-g} - 2e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + r^{2} e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q} \left(U sen q \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{p} dq \left\{ r\, sen q \left[e^{g} + e^{-g} - 2e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + r^{2} e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q} \left(U sen q \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Considerando a última integral na equação (4.3.6), notamos que,

$$\lim_{r \to \infty} \int_{0}^{p} dq r^{2} e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial q} \left(U sen q \right) = \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{p} dq r^{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(U sen q \right).$$

Já que a função $U(q) sen q$ se anula em $q = 0, p$ [44], concluímos que a integral acima se anula. Além disso, no limite $r \to \infty$ temos,

$$e^{g} + e^{-g} - 2e^{-b} \left(\frac{V}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{2M}{r} - \frac{c^{2}}{r^{2}}.$$

Portanto, em tal limite, a equação (4.3.6) se reduz a,

$$E = \frac{1}{2} \int_{0}^{p} dq\, sen q\, M(u, q),$$

que é precisamente a expressão para a energia de Bondi [44]. Esta expressão descreve a massa (energia) presente no sistema radiativo num dado instante retardado u.

Através de cálculos explícitos é possível demonstrar que a energia de Bondi é invariante sob transformação local de Lorentz [45], $\tilde{e}^{a}{}_{m} = \Lambda^{a}{}_{b}(x) e^{b}{}_{m}(x)$, cujo comportamento assintótico é dado por,

$$\Lambda^{(0)}{}_{(0)} = 1 + {}^{1}w^{(0)}{}_{(0)}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\Lambda^{(0)}{}_{(i)} = {}^{1}w^{(0)}{}_{(i)}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\Lambda^{(i)}{}_{(j)} = d^{(i)}{}_{(j)} + {}^{0}w^{(i)}{}_{(j)} + {}^{1}w^{(i)}{}_{(j)}\left(\frac{1}{r}\right),$$

onde ${}^{0}w_{(i)(j)}$ e ${}^{1}w_{ab}$ são quantidades infinitesimais tais que ${}^{0}w_{(i)(j)} = -{}^{0}w_{(i)(j)}$, ${}^{1}w_{ab} = -{}^{1}w_{ba}$ e ${}^{0}w_{(i)(j)}$ são constantes.

4.4 Perda de massa

Considerando $j=1$, no componente $a=(0)$ da equação (3.1.4) obtemos o fluxo de energia gravitacional,

$$\begin{aligned}\Phi_g^{(0)} &= k\int_S dS_j\left[ee^{(0)m}\left(4\Sigma^{bcj}T_{bcm} - d^j{}_m\Sigma^{bcd}T_{bcd}\right)\right]\\ &= k\int_S dS_1\, e\left[g^{01}e^{(0)}{}_0\Omega^1{}_1 + g^{01}e^{(0)}{}_1\Omega^1{}_0 + g^{11}e^{(0)}{}_1\Omega^1{}_1 + g^{12}e^{(0)}{}_1\Omega^1{}_2\right],\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

onde

$$\Omega^1{}_1 = 4\Sigma^{ls1}T_{ls1} - \Sigma^{lsn}T_{lsn}\,,$$

$$\Omega^1{}_0 = 4\Sigma^{ls1}T_{ls0}\,,$$

$$\Omega^1{}_2 = 4\Sigma^{ls1}T_{ls2}\,.$$

Com o auxílio da equação (2.3.7) e considerando só os componentes não nulos do tensor de torção (4.3.3) nas quantidades acima, chegamos às expressões,

$$\begin{aligned}\Omega^1{}_1 = g^{01}g^{01}g^{22}&\left(\frac{1}{2}T_{012}T_{012} + T_{012}T_{201} - \frac{1}{2}T_{201}T_{201} - 2T_{001}T_{212} - \frac{1}{2}T_{102}T_{102}\right)\\ &- 2g^{01}g^{01}g^{33}T_{001}T_{313} + 2g^{01}g^{12}g^{22}T_{012}T_{212}\\ &+ 2g^{01}g^{12}g^{33}\left(T_{012}T_{313} - T_{201}T_{313}\right)\\ &+ g^{12}g^{12}g^{22}T_{212}T_{212} + 2g^{12}g^{12}g^{33}T_{212}T_{313}\\ &- 2g^{11}g^{22}g^{33}T_{212}T_{313} - 2g^{22}g^{33}g^{33}T_{323}T_{323},\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned}\Omega^1{}_0 = g^{01}g^{01}g^{22}&\left(3T_{002}T_{102} + T_{002}T_{012} + T_{002}T_{201} - 2T_{202}T_{001}\right)\\ &- 2g^{01}g^{01}g^{33}T_{001}T_{303} + 2g^{11}g^{12}g^{22}T_{102}T_{212}\\ &+ 2g^{01}g^{12}g^{22}\left(T_{002}T_{212} + T_{202}T_{102} + T_{202}T_{012}\right)\\ &+ 2g^{01}g^{12}g^{33}\left(T_{002}T_{313} - T_{102}T_{303} + T_{012}T_{303} - 2T_{303}T_{201}\right)\\ &+ 2g^{01}g^{11}g^{22}\left(T_{102}T_{012} + T_{102}T_{102}\right)\\ &+ 2g^{12}g^{12}g^{33}\left(-T_{102}T_{323} + T_{202}T_{313} + T_{303}T_{212}\right)\\ &- 2g^{11}g^{22}g^{33}\left(T_{202}T_{313} + T_{212}T_{303}\right) - 4g^{01}g^{22}g^{33}T_{202}T_{303},\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^{1}{}_{2} = {} & g^{01}g^{01}g^{22}\left(-2T_{002}T_{212} - T_{201}T_{202} + T_{202}T_{102} + T_{202}T_{012}\right) \\
& + 2g^{01}g^{01}g^{33}\left(T_{102}T_{303} - T_{001}T_{323} - T_{002}T_{313}\right) \\
& + 2g^{01}g^{12}g^{33}\left(-T_{202}T_{313} + T_{102}T_{323} + T_{012}T_{323} - T_{201}T_{323}\right) \\
& - 2g^{01}g^{22}g^{33}T_{202}T_{323} - 2g^{11}g^{22}g^{33}T_{212}T_{323} + 2g^{12}g^{12}g^{33}T_{212}T_{323}.
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Para calcularmos o fluxo total no limite $r \to \infty$ devemos levar em consideração o comportamento assintótico das seguintes quantidades de campo,

$$\begin{aligned}
& g^{01} \to -1, \\
& g^{11} \to 1, \\
& g^{12} \to \frac{1}{r^2}, \\
& g^{22} \to \frac{1}{r^2}, \\
& g^{33} \to \frac{1}{r^2 sen^2\theta}, \\
& e^{(0)}{}_{0} \to 1, \\
& e^{(0)}{}_{1} \to 1, \\
& e \to r^2 sen\theta.
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Através destes comportamentos assintóticos é fácil de verificar que no limite $r \to \infty$ o primeiro e o terceiro termos do lado direito da equação (4.4.1) se cancelam, e o último termo se comporta como $g^{12}e^{(0)}{}_{1}\Omega^{1}{}_{2} = O\left(1/r^4\right)$. Portanto $\Phi_g^{(0)}$ se reduz a

$$\Phi_g^{(0)} = \frac{1}{16\pi}\int_{S\to\infty} d\theta\, d\phi\; e\left(-\Omega^{1}{}_{0}\right). \tag{4.4.6}$$

Com o intuito de simplificar o calculo da integral acima vamos apenas considerar termos em (4.4.3) que caem como $1/r^2$. Utilizando o comportamento assintótico das equações (4.3.3) e (4.4.5), verificamos que apenas os cinco termos,

$$g^{01}g^{01}g^{22}T_{001}T_{202},$$

$$g^{01}g^{01}g^{33}T_{001}T_{303},$$

$$g^{11}g^{22}g^{33}T_{202}T_{313},$$

$$g^{11}g^{22}g^{33}T_{303}T_{212},$$

$$2g^{01}g^{22}g^{33}T_{202}T_{303},$$

são do tipo $1/r^2$ quando $r \to \infty$. Considerando apenas estes termos e integrando em f encontramos que nesse limite a equação (4.4.6) se reduz a

$$\begin{aligned}\Phi_g^{(0)} = \frac{1}{4}\int_{S\to\infty} dq\left(r^2 senq\right)\Big[&g^{01}g^{01}g^{22}T_{001}T_{202} + g^{01}g^{01}g^{33}T_{001}T_{303} \\ &- g^{11}g^{22}g^{33}\left(T_{202}T_{313} + T_{303}T_{212}\right) + 2g^{01}g^{22}g^{33}T_{202}T_{303}\Big].\end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Através de cálculos explícitos do comportamento assintótico de todas as quantidades que estão sendo integradas, e depois de vários cancelamentos, concluímos que o único termo que determina um valor não nulo de $\Phi_g^{(0)}$ resulta do produto $T_{202}T_{303}$. Considerando apenas este termo em (4.4.7) obtemos

$$\Phi_g^{(0)} = \frac{1}{2}\int_0^p dq\; senq\left(\partial_0 c\right)^2 ,$$

que é o valor conhecido da perda de massa no espaço-tempo de Bondi [44]. No nosso conhecimento esta é a primeira vez que a perda de massa foi obtida por meio de uma equação de fluxo para a energia gravitacional.

Já que a métrica de Bondi é uma solução de vácuo das equações de Einstein, então $\Phi_m^{(0)} = 0$ e, portanto a equação (3.1.5) é verificada,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\int_0^p dq\, senq\left(\partial_0 c\right)^2 .$$

.

CONCLUSÃO

Neste trabalho discutimos a questão da localizabilidade da energia gravitacional e apresentamos o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) como uma formulação geométrica alternativa à Relatividade Geral de Einstein, que possibilita a obtenção de uma energia gravitacional local. Analisando o formalismo Lagrangeano do TEGR demonstramos que a equação dinâmica das tétradas é equivalente às equações de Einstein. Posteriormente, através do formalismo Hamiltoniano do TEGR, identificamos uma expressão covariante para a densidade de energia-momento gravitacional.

A equação dinâmica das tétradas juntamente com a definição de densidade de energia-momento gravitacional permitiu o desenvolvimento da equação de continuidade para a energia e o momento gravitacional, de onde obtivemos a expressão para o fluxo de energia-momento gravitacional.

Em seguida, aplicamos a expressão para o fluxo de energia-momento gravitacional no caso de ondas gravitacionais planas. O principal resultado obtido desta aplicação foi a verificação de que os fluxos de energia e momento de ondas gravitacionais planas e de ondas eletromagnéticas planas são os mesmos, em unidades naturais. Além disso, o valor do fluxo de energia de ondas gravitacionais planas, obtido nesta dissertação, é o mesmo encontrado na literatura [43].

Além de ondas gravitacionais planas, também estudamos o espaço-tempo de Bondi. Neste caso, utilizando a expressão para a energia gravitacional contida num volume V de uma hipersuperfície espacial tridimensional, obtivemos a expressão conhecida da energia de Bondi [44] e, aplicando a expressão do fluxo de energia gravitacional, encontramos o valor conhecido da perda de massa no espaço-tempo de Bondi [44].

Os resultados obtidos nesta dissertação demonstram que o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é bastante consistente para a análise das propriedades da energia e do momento gravitacional, e que podemos aplicá-lo a problemas astrofísicos concretos, o que esperamos que encoraje futuras pesquisas nesta área.

REFERÊNCIAS

[1] J.W. Maluf, J. Math. Phys. **35** (1), 335-343 (1994).

[2] J.W. Maluf, J. Math. Phys. **36** (8), 4242-4247 (1995).

[3] J.W. Maluf and J. F. da Rocha Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).

[4] J.W. Maluf, J. F. da Rocha Neto, T. M. L. Toríbio and K. H. Castelo Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002).

[5] J. W. Maluf, F. F. Faria and K. H. Castello Branco, Class. Quant. Grav. **20**, 4683-4694 (2003).

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1994).

[7] H. C. Ohanian & R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, (W. W. Norton, New York, 1994).

[8] L. D. Faddeev, Sov. Phys. Usp. **25** (3),130-142 (1982).

[9] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin **47**, 778 (1915); Addendum-ibid. **47**, 799 (1915).

[10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New york,1972).

[11] C. Møller, *The Theoy of Relativity* (Oxford University Press,1952).

[12] A. Papapetrou, Proc. R. Irish. Acad. **A52**, 11 (1948).

[13] R. C. Tolman, relativity, *Thermodynamics and Cosmology* (Oxford Univ. Press, London, 1934), p. 227.

[14] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *in Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[15] W. Pauli, *Theory of relativity* (Pergamon Press, Oxford, 1958) p.145.

[16] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam,1960).

[17] H. C. Ohanian, Am. J. Phys **45** (10),903 (1977).

[18] J. Norton, Stud. Hist. Phill. Sci. **16** (3), 203 (1985).

[19] A. Einstein, Ann. d. Phys. (Leipzig) **55**, (1918).

[20] A. Einstein, Berliner Sitzungsber, **217** (1928).

[21] C. Møller, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk **1** (10), (1960)

[22] C. Møller, Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitation*. Proceedings of the conference on Theory of Gravitation*, Warszawa and Jablona 1962 (PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa e Gauthier-Villars, Paris, 1964)

[23] C. Pellegrini and J. Plebanski, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **2** (2), (1962).

[24] J. Schwinger, Phys. Rev. **130** (3), 1253 (1963).

[25] K. Hayashi and T. Nakano, Prog. Theor. Phys. **38** (2), 491 (1967).

[26] K. Hayashi and T Shirafuji, Phys. Rev D **19** (12), 3524 (1979).

[27] F. W. Hehl, Y. Ne'eman, J. Nitsch and P. Von der Heyde, Phys. Lett. **78B** (1), 102 (1978)

[28] M. Schweizer and N. Straumann, Phys. Lett. **71A** (5,6), 493-495 (1979).

[29] J. Nitsch and F. W. Hehl, Phys. Lett. **90B** (1,2), 98-102 (1980).

[30] M. Schweizer, N. Straumann and A. Wipf, Gen. Rel. Grav. **12** (11), 951-961 (1980).

[31] R. Weitzenböck, *Inavarianten Theorie* (Nordhoff, Groningen, 1923).

[32] F. W. Hehl, in *Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, torsion, Rotation an Supergravity*, Erice, 1979, edited by . G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980); F. W. Hehl, J. D. MacCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[33] Y. N Obukov and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **67**, 044016 (2003).

[34] M. Blagojevic and M. Vasilic, Phys. Rev. D **64**, 044010 (2001).

[35] J. M. Nester, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 1755 (1989).

[36] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**,4689 (1997).

[37] J. Schwinger, Phys. Rev. **130**, 800 (1963).

[38] N. Coote and A. Macfarlane, Gen. Rel. Grav. **9**, 621 (1978).

[39] T. Eguchi, P. Gilkey and A.Hanson, Phys. Rep. **66**, 213 (1980).

[40] J. W. Maluf, Phy. Rev. D **67**, 108501 (2003).

[41] J. W. Maluf and J. F. da Rocha Neto, J. Math. Phys. **40** 1490 (1999).

[42] J. W. Maluf and A. Kneip, J. Math. Phys. **38** (1), 458-465 (1997).

[43] B. F. Schutz, *A first Course in General Relativity* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).

[44] H. Bondi, M. G. J. van der Burg e A. W K. Metzner, Proc. R. Soc. London, Ser. A **269**, 21 (1962).

[45] J. W. Maluf and F. F. Faria, Ann. Phys. (Leipzig) **13**, 604-616 (2004).